ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 20 | Oktober 1940 | Heft 5

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Drehströmung über festem Grunde.

Von *U. T. Bödewadt* in Göttingen.

§ 1. Die Aufgabe. Von den Bewegungen einer sich drehenden Flüssigkeit über einer ebenen Platte war bisher der Fall noch nicht mathematisch bearbeitet worden, in dem es sich um den stationären Endzustand einer im Unendlichen mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit kreisenden Flüssigkeit über ruhender Grundebene handelte. Den stationären Endzustand einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit über drehender Ebene behandelte W. G. Cochran[1]); die Anfänge der Bewegung bei plötzlichem Einsetzen der Plattendrehung relativ zur Flüssigkeit hat in beiden Fällen K. H. Thiriot untersucht, der auch alle vier Fälle nachgemessen hat[2]). Hier soll der zuerst erwähnte Fall (angenähert im Kerngebiet eines Zyklons verwirklicht) unter Anlehnung an die Methode und die Bezeichnungen bei Cochran behandelt werden.

Die nicht zusammendrückbare Flüssigkeit habe die Dichte ϱ und die Zähigkeitskonstante ν; sie stehe unendlich hoch über der (x, y)-Ebene $z=0$. Bei Einführung von Zylinderkoordinaten r, φ, z: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ seien u, v, w die radiale, tangentiale und vertikale Komponente der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$; die Navier-Stokesschen Gleichungen

$$(\mathfrak{v}, \text{grad})\,\mathfrak{v} = -\frac{1}{\varrho}\,\text{grad}\,p + \nu\cdot\Delta\mathfrak{v}; \quad \text{div}\,\mathfrak{v} = 0 \quad \ldots \quad (1.1)$$

gehen dann über in

$$u\,u_r + \frac{1}{r}\,u_\varphi\,v - \frac{1}{r}\,v^2 + w\,u_z = -\frac{1}{\varrho}\,p_r + \nu\left(u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\varphi\varphi} + u_{zz}\right) \quad \ldots \quad (1.2.1),$$

$$u\,v_r + \frac{1}{r}\,v_\varphi\,v + \frac{1}{r}\,u\,v + w\,v_z = -\frac{1}{\varrho\,r}\,p_\varphi + \nu\left(v_{rr} + \frac{1}{r}\,v_r + \frac{1}{r^2}\,v_{\varphi\varphi} + v_{zz}\right) \quad \ldots \quad (1.2.2),$$

$$u\,w_r + \frac{1}{r}\,w_\varphi\,v \qquad + w\,w_z = -\frac{1}{\varrho}\,p_z + \nu\left(w_{rr} + \frac{1}{r}\,w_r + \frac{1}{r^2}\,w_{\varphi\varphi} + w_{zz}\right) \quad \ldots \quad (1.2.3),$$

$$u_r + \frac{1}{r}\,u \quad + \frac{1}{r}\,v_\varphi + \quad w_z = \quad 0 \quad \ldots \quad (1.2.4).$$

Die Strömung soll nun drehsymmetrisch um die Achse $r=0$ sein, d. h. die Ableitungen nach φ verschwinden. Setzt man

$$u = r\,f(z), \qquad v = r\,g(z), \qquad w = h(z) \quad \ldots \quad (1.3),$$

[1]) The flow due to a rotating disc. Cambridge Proc. Bd. 30 (1934), S. 365 bis 275.

[2]) K.-H. Thiriot: Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über einem rotierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungszustandes. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 1 bis 13.

so vereinfachen die Gl. (1.2) sich zu

$$f^2 - g^2 + h f_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{1}{r} p_r + \nu \cdot f_{zz} \quad \text{(1.4.1)},$$

$$2fg + h g_z = \qquad + \nu \cdot g_{zz} \quad \text{(1.4.2)},$$

$$+ h h_z = -\frac{1}{\varrho} p_z \quad + \nu \cdot h_{zz} \quad \text{(1.4.3)},$$

$$2f + h_z = 0 \quad \text{(1.4.4)}.$$

Im Grenzfall verschwindender Reibung ($\nu = 0$) soll eine reine Drehung mit fester Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse ($r = 0$) vorliegen: $f = 0$, $g = \omega$, $h = 0$; dann folgt $\omega^2 = \frac{1}{\varrho}\frac{1}{r} p_r$. Für sehr kleine Zähigkeiten ν nimmt man nach der Prandtlschen Grenzschichttheorie diesen Wert der horizontalen Ableitung des Druckes als überall gültig an und erhält so unter Fortlassen der Gl. (1.4.3) das System

$$f^2 - g^2 + h f_z = -\omega^2 + \nu \cdot f_{zz} \quad \text{(1.5.1)},$$

$$2fg + h g_z = \quad + \nu \cdot g_{zz} \quad \text{(1.5.2)},$$

$$2f + h_z = 0 \quad \text{(1.5.3)}.$$

Um dimensionsfreie Größen zu erhalten, setzt man

$$z = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \cdot \zeta; \quad f(z) = \omega \cdot F(\zeta), \quad g(z) = \omega \cdot G(\zeta), \quad h(z) = \sqrt{\omega \nu}\, H(\zeta) \quad \text{(1.6)}.$$

So entsteht schließlich

$$F^2 - G^2 + H F' = -1 + F'' \quad \text{(1.7.1)},$$

$$2 F G + H G' = \quad + G'' \quad \text{(1.7.2)},$$

$$2 F + H' = 0 \quad \text{(1.7.3)}.$$

Randbedingungen sind: Haften der Flüssigkeit an der ruhenden Grundfläche ($\zeta = 0$) und gleichmäßige Drehung in großem Abstande von der Grundebene ($\zeta = \infty$):

$$F(0) = 0, \quad G(0) = 0, \quad H(0) = 0 \quad \text{(1.8.1)},$$

$$F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 1 \quad \text{(1.8.2)}.$$

Cochran hat das bei ihm auftretende, dem vorliegenden[3]) (1.7), (1.8) ähnliche System dadurch gelöst, daß er einerseits Potenzreihen, andererseits auch eine asymptotische Entwicklung benutzte und beide bei einem endlichen Wert von ζ aufeinander abglich. Bei der Übertragung dieses Verfahrens bestand die Hauptschwierigkeit darin, die asymptotische Entwicklung aufzufinden. Diese zeigte sich dann aber für das ganze Gebiet $0 \leqq \zeta < \infty$ so stark konvergent, daß für eine grobe Lösung die Potenzreihen noch nicht benötigt wurden. Nur weil die Konvergenz der asymptotischen Reihen nicht ausreichte, um mit den Gliedern bis zur 6. Ordnung einschließlich (mehr zu nehmen, verbot sich aus Zeitgründen infolge ihres stark zusammengesetzten Aufbaues) den Fehler unter 0,03 herabzudrücken, wurden zuletzt doch noch Potenzreihen verwendet und bei $\zeta = 1$ mit den asymptotischen Reihen abgeglichen.

Es sei bemerkt, daß diese Methode (einschließlich der zur Auffindung der asymptotischen Reihen) sich ohne weiteres auf alle Gleichungen vom Typus

$y'' = F(y, y')$ (F ein Ausdruck 2. Grades mit konstanten Koeffizienten)

übertragen läßt, ferner auf entsprechende Gleichungen mit Ausdrücken höheren Grades und auf Systeme solcher Differentialgleichungen, wenn die Randbedingungen von ähnlicher Art wie (1.8) sind — vorausgesetzt, daß die gefundenen Reihen genügend stark konvergieren.

§ 2. Der Lösungsansatz. Führt man in die Gl. (1.7) für die Funktionen F, G, H die Potenzreihen

$$\left.\begin{aligned} F(\zeta) &= a_1 \zeta + a_2 \frac{\zeta^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{\zeta^n}{n!} + \cdots, \\ G(\zeta) &= b_1 \zeta + b_2 \frac{\zeta^2}{2!} + \cdots + b_n \frac{\zeta^n}{n!} + \cdots, \\ H(\zeta) &= \qquad c_2 \frac{\zeta^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{\zeta^n}{n!} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{(2.1)}$$

[3]) Vgl. die Gl. (16) bis (18) bei Thiriot, a. a. O. S. 6.

ein, so ergeben sich Rekursionsformeln, aus denen für die ersten Koeffizienten die in Zahlentafel 1 zusammengestellten Werte folgen. Darin bleiben die beiden Konstanten A, B noch

Zahlentafel 1. Die Koeffizienten der Potenzreihen.

$a_1 = -A$	$b_1 = +B$	$c_1 = 0$
$a_2 = +1$	$b_2 = 0$	$c_2 = +2A$
$a_3 = 0$	$b_3 = 0$	$c_3 = -2$
$a_4 = -2B^2$	$b_4 = -2AB$	$c_4 = 0$
$a_5 = +2A$	$b_5 = +4B$	$c_5 = +4B^2$
$a_6 = -2$	$b_6 = 0$	$c_6 = -4A$
$a_7 = -4AB^2$	$b_7 = -20A^2B - 16B^3$	$c_7 = +4$
$a_8 = +40A^2 - 4B^2$	$b_8 = +112AB$	$c_8 = +8AB^2$
$a_9 = -144A$	$b_9 = -136B$	$c_9 = -80A^2 + 8B^2$
$a_{10} = +144 - 128A^2B^2 + 88B^4$	$b_{10} = -800A^3B - 484AB^3$	$c_{10} = +288A$
	$b_{11} = +8272A^2B + 1472B^3$	
	$b_{12} = -27\,520AB$	

unbestimmt, durch deren passende Wahl die Grenzbedingungen (1.8.2) zu erfüllen wären. Doch werden die Reihen (2.1) für große Werte von ζ unbrauchbar. Es muß daher eine bei $\zeta = \infty$ konvergente Entwicklung gefunden werden.

Aus (1.7.3) und (1.8.2) folgt $H'(\infty) = 0$. Für $H(\zeta)$ ist daher ebenfalls ein fester Grenzwert zu erwarten, den es noch zu bestimmen gilt:

$$H(\infty) = h \quad \text{(2.2).}$$

Damit wird (1.7) bei $\zeta = \infty$ befriedigt.

Für F, G, H werden jetzt Reihen angesetzt aus noch unbestimmten Funktionen, die bei $\zeta = \infty$ verschwinden müssen; p ist eine frei wählbare Konstante:

$$\left.\begin{aligned} F(\zeta) &= 0 + p\,\varphi_1(\zeta) + p^2\,\varphi_2(\zeta) + p^3\,\varphi_3(\zeta) + \cdots, \\ G(\zeta) &= 1 + p\,\psi_1(\zeta) + p^2\,\psi_2(\zeta) + p^3\,\psi_3(\zeta) + \cdots, \\ H(\zeta) &= h + p\,\chi_1(\zeta) + p^2\,\chi_2(\zeta) + p^3\,\chi_3(\zeta) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{(2.3).}$$

Diese Reihen sollen für die folgenden Umbildungen soweit wie notwendig als absolut und gleichmäßig konvergent vorausgesetzt werden; ob diese Voraussetzung zutrifft, wird sich nachträglich zeigen[4]).

Setzt man die Reihen (2.3) in die Gl. (1.7) ein und faßt gleiche Potenzen von p zusammen, so wird das erhaltene Gleichungssystem sicher dann befriedigt, wenn die Koeffizienten jeder Potenz von p einzeln verschwinden. So erhält man zur Bestimmung der unbekannten Funktionen die Gleichungen

$$\varphi_1'' - h\,\varphi_1' + 2\,\psi_1 = 0 \quad \text{(2.4.1),}$$

$$\psi_1'' - h\,\psi_1' - 2\,\varphi_1 = 0 \quad \text{(2.4.2);}$$

$$\varphi_k'' - h\,\varphi_k' + 2\,\psi_k = \sum_{\lambda=1}^{k-1} (\varphi_\lambda\,\varphi_{k-\lambda} - \psi_\lambda\,\psi_{k-\lambda} + \varphi_\lambda'\,\chi_{k-\lambda}) \quad \text{(2.5.1),}$$

$$\psi_k'' - h\,\psi_k' - 2\,\varphi_k = \sum_{\lambda=1}^{k-1} (2\,\varphi_\lambda\,\psi_{k-\lambda} + \psi_\lambda'\,\chi_{k-\lambda}) \quad \text{(2.5.2);}$$

$$2\,\varphi_k + \chi_k' = 0 \quad \text{(2.6).}$$

Der Wert von p spielt dabei keine Rolle, sondern erst bei der Erfüllung der Anfangsbedingungen (1.8.1). Dann kann man aber den Faktor p^k auch in φ_k, ψ_k, χ_k aufnehmen oder, was auf dasselbe hinauskommt, jetzt

$$p = 1 \quad \text{(2.7)}$$

setzen. Dadurch gehen die Reihen (2.3) über in

$$\left.\begin{aligned} F(\zeta) &= 0 + \varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta) + \varphi_3(\zeta) + \cdots, \\ G(\zeta) &= 1 + \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) + \psi_3(\zeta) + \cdots, \\ H(\zeta) &= h + \chi_1(\zeta) + \chi_2(\zeta) + \chi_3(\zeta) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{(2.7).}$$

[4]) Da alle diese Funktionen denselben linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (2.5), (2.6), nur mit verschiedenen rechten Seiten gehorchen, so folgt ihre Ab- bzw. Zunahme mit der Ordnung k einem exponentiellen Gesetz, das noch von Schwingungen überlagert sein kann. Die numerisch augenscheinliche Konvergenz der ersten Glieder (Zahlentafel 2) genügt daher, um die Konvergenz im ganzen zu sichern.

Um sofort mit diesem Ansatz zu beginnen, hätte man bei der Produktbildung die Cauchysche Reihenmultiplikation anwenden müssen, doch würden die Gl. (2.4) bis (2.6) dabei sehr viel willkürlicher erscheinen.

§ 3. Die erste Lösungsstufe: Die Funktionen $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$, $\chi_1(\zeta)$. Setzt man für das System (2.4) eine Grundlösung in der Gestalt

$$\varphi_1(\zeta) = e^{\mu\zeta}, \qquad \psi_1(\zeta) = C\, e^{\mu\zeta}$$

an, so wird der Exponent μ komplex: $\mu = -a + i\beta$; in reeller Schreibweise hat man

$$\varphi_1(\zeta) = e^{-a\zeta} F_1(\zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.1.1),$$

$$\psi_1(\zeta) = e^{-a\zeta} G_1(\zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.1.2).$$

Damit wird (2.4) zu

$$F_1'' - (2a+h) F_1' + a(a+h) F_1 + 2 G_1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3.2.1),$$

$$G_1'' - (2a+h) G_1' + a(a+h) G_1 - 2 F_1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3.2.2),$$

und die Funktionen F_1, G_1 haben die Form

$$F_1(\zeta) = {}^F C_1 \cos\beta\zeta + {}^F S_1 \sin\beta\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.3.1),$$

$$G_1(\zeta) = {}^G C_1 \cos\beta\zeta + {}^G S_1 \sin\beta\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.3.2).$$

Zur Bestimmung der Konstanten ${}^F C_1$, ${}^F S_1$, ${}^G C_1$, ${}^G S_1$ erhält man durch Einführen von (3.3) in (3.2) vier homogene Gleichungen. Ihre Determinante muß verschwinden; sie hat den Wert

$$\left[(a(a+h) - \beta^2)^2 + 4 - (2a+h)^2 \beta^2\right]^2 + 4\left[a(a+h) - \beta^2\right]^2 \left[(2a+h)\beta\right]^2.$$

Da die beiden Summanden Quadrate reeller Zahlen sind, müssen sie einzeln verschwinden. Der letzte Faktor des zweiten Summanden kann nicht Null sein, da dann der erste Summand positiv wäre; also muß der vorhergehende Faktor im zweiten Summanden verschwinden:

$$a(a+h) = \beta^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.4).$$

Damit der erste Summand ebenfalls zu Null wird, muß außerdem

$$\pm (2a+h)\beta = 2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.5)$$

gelten, wobei das Vorzeichen der linken Seite noch unbekannt ist.

Aus (3.4) folgt

$$a = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Nun sollten die Funktionen $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$ für $\zeta \to \infty$ verschwinden. Darum muß a positiv sein:

$$a = -\frac{h}{2} + \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.6).$$

Nach (3.4) und (3.5) sind a und $a+h$ die Wurzeln einer der beiden quadratischen Gleichungen

$$z^2 \pm \frac{2}{\beta} z + \beta^2 = 0,$$

deren Lösungen sich als

$$z = \mp \frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \beta^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.7)$$

angeben lassen. Da die beiden Lösungen a und $a+h$ reell sind, so muß der Radikand in (3.7) positiv sein, also $\beta^2 < 1$. Ferner kann β o. B. d. A. positiv genommen werden, demnach ist

$$0 < \beta < 1.$$

Der halbe Unterschiedsbetrag der Wurzeln a und $a+h$ kann auch aus (3.7) entnommen werden:

$$\left|\frac{h}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \beta^2}.$$

Quadriert man diese Gleichung, so läßt sich daraus β als Funktion von h finden:

$$\beta = +\sqrt{-q + \sqrt{1+q^2}} \quad \text{mit} \quad q = \frac{h^2}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.8).$$

Aus (3.6) und (3.8) folgt die Formel

$$a = +\frac{1}{\beta} - \frac{h}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3.9);$$

man kann wegen (3.8) a auch nur durch β oder nur h darstellen. — Aus (3.9) ist das in (3.5) noch unbestimmt gebliebene Vorzeichen zu erkennen:

$$(2a + h)\beta = 2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3.10).$$

Bei den weiteren Rechnungen konnte manche Vereinfachung durch die aus (3.4) und (3.10) fließende Beziehung

$$a^2 + \beta^2 = \frac{2a}{\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3.11)$$

erhalten werden.

Die Erfüllung des homogenen Gleichungssystems für die in (3.3) auftretenden Konstanten erfordert nur noch die zwei Gleichungen

$${}^FC_1 = -{}^GS_1, \qquad {}^FS_1 = {}^GC_1.$$

Darum sollen hierfür zwei neue Bezeichnungen f, g eingeführt werden:

$$\left.\begin{array}{ll} {}^FC_1 = +f, & {}^FS_1 = +g, \\ {}^GC_1 = +g, & {}^GS_1 = -f \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3.12).$$

Aus diesen drei durch (2.2), (3.12) erklärten Konstanten f, g, h lassen sich alle Konstanten der weiteren Lösungsstufen berechnen.

Hinsichtlich der Funktion $\chi_1(\zeta)$ folgt aus (2.6) für $k = 1$, daß sie die Form

$$\chi_1(\zeta) = e^{-a\zeta} H_1(\zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3.13),$$

$$H_1(\zeta) = {}^HC_1 \cos\beta\zeta + {}^HS_1 \sin\beta\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3.14)$$

haben muß; die Bestimmung der Konstanten soll unten im Zusammenhange mit denen der höheren Stufen erfolgen.

§ 4. Die weiteren Lösungsstufen. Für $k = 2$ lauten die Gl. (2.4):

$$\varphi_2'' - h\varphi_2' + 2\psi_2 = \varphi_1^2 - \psi_1^2 + \varphi_1'\chi_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4.1.1),$$

$$\psi_2'' - h\psi_2' - 2\varphi_2 = 2\varphi_1\psi_1 + \psi_1'\chi_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4.1.2).$$

Die rechten Seiten sind Produkte aus dem Faktor $e^{-2a\zeta}$ und trigonometrischen Polynomen der Frequenzen 2β und 0β. Es gibt also ein partikuläres Integral von (4.1) der Gestalt

$$\varphi_2(\zeta) = e^{-2a\zeta} F_2(\zeta); \qquad \psi_2(\zeta) = e^{-2a\zeta} G_2(\zeta),$$

mit

$$F_2(\zeta) = {}^FC_2^0 + {}^FC_2^2 \cos 2\beta\zeta + {}^FS_2^2 \sin 2\beta\zeta,$$

$$G_2(\zeta) = {}^GC_2^0 + {}^GC_2^2 \cos 2\beta\zeta + {}^GS_2^2 \sin 2\beta\zeta.$$

In dem allgemeinen Integral ist außerdem ein Vielfaches der Lösung des zugehörigen homogenen Systems enthalten. Dieser Anteil werde mit der ersten Stufe vereinigt, hier also (und ebenso für $k = 3, 4, 5, \ldots$) null gesetzt.

Die Fortführung dieser Überlegungen ergibt, daß allgemein angesetzt werden kann

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_k(\zeta) = e^{-ka\zeta} F_k(\zeta), \\ \psi_k(\zeta) = e^{-ka\zeta} G_k(\zeta), \\ \chi_k(\zeta) = e^{-ka\zeta} H_k(\zeta) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4.2),$$

wobei für $k = 0$

$$F_0(\zeta) = 0, \qquad G_0(\zeta) = 1, \qquad H_0(\zeta) = h$$

ist und für $k = 1, 2, \ldots$:

$$\left.\begin{array}{l} F_k(\zeta) = \sum\limits_\lambda \left({}^FC_k^\lambda \cos\lambda\beta\zeta + {}^FS_k^\lambda \sin\lambda\beta\zeta\right), \\ G_k(\zeta) = \sum\limits_\lambda \left({}^GC_k^\lambda \cos\lambda\beta\zeta + {}^GS_k^\lambda \sin\lambda\beta\zeta\right), \\ H_k(\zeta) = \sum\limits_\lambda \left({}^HC_k^\lambda \cos\lambda\beta\zeta + {}^HS_k^\lambda \sin\lambda\beta\zeta\right) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (4.3);$$

der Summenzeiger λ hat darin die Werte k, $k-2$, $k-4$, $\ldots \geqq 0$ zu durchlaufen. Für $\lambda = 0$ ist stets

$${}^FS_k^0 = {}^GS_k^0 = {}^HS_k^0 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4.4).$$

Die Gl. (2.5), (2.6) werden durch (4.2) zu

$$\left.\begin{aligned} F_k'' - (2\,k\,a + h)\,F_k' + k\,a\,(k\,a + h)\,F_k + 2\,G_k \\ = \sum_{n=1}^{k-1} \left\{F_n\,F_{k-n} - G_n\,G_{k-n} + (F_n' - n\,a\,F_n)\,H_{k-n}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.5.1),$$

$$\left.\begin{aligned} G_k'' - (2\,k\,a + h)\,G_k' + k\,a\,(k\,a + h)\,G_k - 2\,F_k \\ = \sum_{n=1}^{k-1} \left\{2\,F_n\,G_{k-n} + (G_n' - n\,a\,G_n)\,H_{k-n}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.5.2),$$

$$H_k' - k\,a\,H_k + 2\,F_k = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4.6).$$

Aus (4.6) entsteht durch (4.3) ein Gleichungspaar, das ${}^H C_k^\lambda$ und ${}^H S_k^\lambda$ liefert:

$$\left.\begin{aligned} {}^H C_k^\lambda &= \frac{2}{k^2\,a^2 + \lambda^2\,\beta^2}\left(k\,a\,{}^F C_k^\lambda + \lambda\,\beta\,{}^F S_k^\lambda\right), \\ {}^H S_k^\lambda &= \frac{2}{k^2\,a^2 + \lambda^2\,\beta^2}\left(k\,a\,{}^F S_k^\lambda - \lambda\,\beta\,{}^F C_k^\lambda\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.7);$$

für $\lambda = 0$ kommt einfach

$${}^H C_k^0 = \frac{2}{k\,a}\,{}^F C_k^0 \quad \ldots \ldots \quad (4.8).$$

Die Koeffizienten von $H_1(\zeta)$ in (3.14) ergeben sich aus (4.7) für $k = 1$, $\lambda = 1$ wegen (3.4), (3.11), (3.12) zu

$$\left.\begin{aligned} {}^H C_1 &= \beta\,f + (a + h)\,g\,, \\ {}^H S_1 &= \beta\,g - (a + h)\,f \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.9).$$

Im Fall $\lambda = k > 1$ verschwinden übrigens alle diese Koeffizienten:

$${}^F C_k^k = {}^F S_k^k = {}^G C_k^k = {}^G S_k^k = {}^H C_k^k = {}^H S_k^k = 0 \quad \text{für } k \geq 2,$$

wie unten noch gezeigt wird.

Die rechten Seiten der Gl. (4.5) nehmen bei Einsetzen von (4.3) die Formen

$$\ldots = \sum_\lambda \left\{{}^f C_k^\lambda \cos\lambda\,\beta\,\zeta + {}^f S_k^\lambda \sin\lambda\,\beta\,\zeta\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.5.1),$$

$$\ldots = \sum_\lambda \left\{{}^g C_k^\lambda \cos\lambda\,\beta\,\zeta + {}^g S_k^\lambda \sin\lambda\,\beta\,\zeta\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.5.2)$$

an; λ durchläuft wieder die Werte (k), $k-2$, $k-4$, $\ldots \geq 0$. Die Berechnung der Koeffizienten ${}^f C_k^\lambda$, ${}^f S_k^\lambda$, ${}^g C_k^\lambda$, ${}^g S_k^\lambda$ geschieht im folgenden Paragraphen. Links treten dieselben Frequenzen auf; die Gl. (4.5) spalten sich dadurch in mehrere Systeme von je vier linearen Gleichungen folgender Art:

$$\left.\begin{aligned} +2\,A_k^\lambda\,{}^F C_k^\lambda - 2\,B_k^\lambda\,{}^F S_k^\lambda + 2\,{}^G C_k^\lambda &= {}^f C_k^\lambda, \\ +2\,B_k^\lambda\,{}^F C_k^\lambda + 2\,A_k^\lambda\,{}^F S_k^\lambda + 2\,{}^G S_k^\lambda &= {}^f S_k^\lambda, \\ -2\,{}^F C_k^\lambda + 2\,A_k^\lambda\,{}^G C_k^\lambda - 2\,B_k^\lambda\,{}^G S_k^\lambda &= {}^g C_k^\lambda, \\ -2\,{}^F S_k^\lambda + 2\,B_k^\lambda\,{}^G C_k^\lambda + 2\,A_k^\lambda\,{}^G S_k^\lambda &= {}^g S_k^\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.11).$$

Hierin sind A_k^λ, B_k^λ Abkürzungen für Ausdrücke in a, β:

$$\left.\begin{aligned} 2\,A_k^\lambda &= k\,a\,(k\,a + h) - \lambda^2\,\beta^2 = k\,(k-1)\,a^2 + (k - \lambda^2)\,\beta^2, \\ 2\,B_k^\lambda &= (2\,k\,a + h)\,\beta\,\lambda = (2\,k - (k-1)\,h\,\beta)\,\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.12).$$

Die Auflösung von (4.11) geschieht nach dem Schema

$$\left.\begin{aligned} {}^F C &= \frac{1}{\Delta}\left(+M\,{}^f C + N\,{}^f S - P\,{}^g C - Q\,{}^g S\right), \\ {}^F S &= \frac{1}{\Delta}\left(-N\,{}^f C + M\,{}^f S + Q\,{}^g C - P\,{}^g S\right), \\ {}^G C &= \frac{1}{\Delta}\left(+P\,{}^f C + Q\,{}^f S + M\,{}^g C + N\,{}^g S\right), \\ {}^G S &= \frac{1}{\Delta}\left(-Q\,{}^f C + P\,{}^f S - N\,{}^g C + M\,{}^g S\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.13),$$

in dem M, N, P, Q, Δ die Bedeutung

$$\left.\begin{array}{ll} M = A\,(A^2 + B^2 + 1), & N = B\,(A^2 + B^2 - 1), \\ P = A^2 - B^2 + 1, & Q = 2\,A\,B, \\ \Delta = 2\,(P^2 + Q^2) & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4.14)$$

haben; $8\,\Delta$ ist die Determinante des Systems (4.11). Allen Größen in (4.13), (4,14) sind jeweils dieselben zwei Zeiger k, λ zu geben. — Für $\lambda = 0$ verschwinden die S-Koeffizienten, es bleiben

$$\left.\begin{array}{l} {}^F C_k^0 = \dfrac{1}{D_k}\left(E_k\,{}^f C_k^0 - {}^g C_k^0\right), \\ {}^G C_k^0 = \dfrac{1}{D_k}\left(E_k\,{}^g C_k^0 + {}^f C_k^0\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4.15)$$

mit

$$\left.\begin{array}{l} E_k = (\alpha^2\,(k-1) + \beta^2) \cdot \dfrac{k}{2}, \\ D_k = 2\,(1 + E_k^2) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4.16).$$

§ 5. Die rechten Seiten von (4.5). Um die Koeffizienten ${}^f C$, ${}^f S$, ${}^g C$, ${}^g S$ der rechten Seiten von (4.5) zu finden, muß man zunächst Produkte der Form $F_n\,G_{k-n}$ entwickeln. Aus (4.3) gewinnt man dafür die Formel

$$\begin{aligned} F_n\,G_{k-n} = \sum_{\varkappa} \Big\{ & \cos \varkappa\,\beta\,\zeta \cdot \sum_{\mu} \frac{1}{2}\left({}^F C_n^{\mu}\,{}^G C_{k-n}^{\varkappa-\mu} - {}^F S\,{}^G S\right) \\ & + \sin \varkappa\,\beta\,\zeta \cdot \sum_{\mu} \frac{1}{2}\left({}^F C\;\;{}^G S \qquad + {}^F S\,{}^G C\right)\Big\} \\ + \sum_{\lambda} \Big\{ & \cos \lambda\,\beta\,\zeta \cdot \sum_{\nu} \frac{1}{2}\left({}^F C_n^{\nu}\,{}^G C_{k-n}^{\lambda+\nu} + {}^F S\,{}^G S\right) \\ & + \sin \lambda\,\beta\,\zeta \cdot \sum_{\nu} \frac{1}{2}\left({}^F C\;\;{}^G S \qquad - {}^F S\,{}^G C\right)\Big\}, \end{aligned}$$

in der $\varkappa$ die Werte der Reihe k, $k-2$, $k-4$, $\ldots \geqq 0$ durchläuft ($\varkappa = 0$ nur bei geradem n), μ die zwischen $n - 2\varkappa$ und $\varkappa$ liegenden Werte der Reihe n, $n-2$, $n-4$, $\ldots \geqq 0$; λ nimmt die zwischen $k-n$ und $-n$ befindlichen Zahlen der Reihe k, $k-2$, $k-4$, $\ldots$ an, und für ν kommen die zwischen $k-n-\lambda$ und $-\lambda$ liegenden der Zahlen n, $n-2$, $n-4$, $\ldots \geqq 0$ in Betracht. (Soweit in der Summe dieselbe Zeigeranordnung sich wiederholte, ist sie nur beim ersten Gliede hingeschrieben.)

Man bilde jetzt den Ausdruck $\sum\limits_{n=1}^{k=1} F_n\,G_{k-n}$, vertausche die Summationsreihenfolge und wende das Ergebnis auf (4.5) an. Nach Änderung einiger Bezeichnungen erhält man die Formel

$$\begin{aligned} {}^f C_k^{\lambda} = & \sum_{\sigma=0}^{\lambda} \sum_{\mu} \frac{1}{2} \Big\{ {}^F C_{\mu}^{\sigma} \cdot {}^F C_{k-\mu}^{\lambda-\sigma} - {}^F S \cdot {}^F S - {}^G C \cdot {}^G C + {}^G S \cdot {}^G S \\ & \qquad + \left(\sigma\,\beta\,{}^F S - \mu\,\alpha\,{}^F C\right) \cdot {}^H C + \left(\sigma\,\beta\,{}^F C + \mu\,\alpha\,{}^F S\right) \cdot {}^H S \Big\} \\ & + \sum_{\tau=0}^{\frac{k-\lambda}{2}} \sum_{\nu} \Big[{}^F C_{\nu}^{\tau} \cdot {}^F C_{k-\nu}^{\lambda+\tau} + {}^F S \cdot {}^F S - {}^G C \cdot {}^G C - {}^G S \cdot {}^G S \\ & \qquad + \frac{1}{2} \Big\{ \left(\tau\,\beta\,{}^F S - \nu\,\alpha\,{}^F C\right) \cdot {}^H C + {}^H C \cdot \left(\tau\,\beta\,{}^F S - \nu\,\alpha\,{}^F C\right) \\ & \qquad - \left(\tau\,\beta\,{}^F C + \nu\,\alpha\,{}^F S\right) \cdot {}^H S - {}^H S \cdot \left(\tau\,\beta\,{}^F C + \nu\,\alpha\,{}^F S\right) \Big\} \Big] \end{aligned}$$

und drei ähnliche für ${}^fS_k$, ${}^gC_k$, ${}^gS_k$. In diesen Formeln ($k \geqq 2$, $0 < \lambda \leqq k-2$) durchläuft μ die Werte aus der Reihe σ, $\sigma+2$, $\sigma+4$, ..., $\sigma+k-\lambda$, für die $1 \leqq \mu \leqq k=1$ gilt, und ν die Werte τ, $\tau+2$, $\tau+4$, ..., für welche die Ungleichung $1 \leqq \nu \leqq k-\lambda-\tau$ zutrifft.

Für $\lambda=0$ entstehen entsprechende, doch kürzere Formeln für ${}^fC_k^0$ und ${}^gC_k^0$.

Bei der Auswertung ist auf die Gl. (3.12), (4.4), (4.9) und (4.10) zu achten. Die letzte ist so zu beweisen, daß man zunächst die den obigen entsprechenden allgemeinen Formeln für ${}^fC_k^k$, ... aufstellt und dann durch Nachrechnen bestätigt, daß ${}^fC_2^2 = \ldots = {}^gS_2^2 = 0$ ist wegen (4.9). Durch (4.13), (4.7) folgt daraus ${}^FC_2^2 = \ldots = {}^HS_2^2 = 0$. Die allgemeinen Formeln für ${}^fC_k^k$, ... enthalten für $k=3$ in jedem Gliede mindestens einen Faktor dieser Reihe ${}^FC_2^2$, ..., so daß auch die ${}^fC_3^3$, ... verschwinden, usf.

Um die Funktionen $F(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ nach (2.7), (4.2), (4.3) bis $k \leqq 6$ aus f, g, h zu berechnen, braucht man zunächst folgende Hilfsgrößen:

$$S = f^2 + g^2; \qquad \lambda = 3 - 2h\beta \quad \ldots \ldots \quad (5.1),$$

$$v = \frac{-1}{D_2}\left(2 - \frac{3}{2}h\beta\right); \qquad w = \frac{1}{D_2}(\alpha + 2h); \qquad u = w\alpha \quad \ldots \quad (5.2),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha f - \beta g); \qquad \delta = \frac{1}{2}(\alpha g + \beta f) \quad \ldots \ldots \quad (5.3),$$

$$\Phi = \alpha f + \beta g; \qquad \Psi = \alpha g - \beta f \quad \ldots \ldots \quad (5.4),$$

$$\left.\begin{array}{ll} s_3 = -\beta\Phi; & t_3 = -\beta\Psi \\ s_k = s_3 - (k-3)f; & t_k = t_3 - (k-3)g \qquad (2 \leqq k \leqq 5) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5.5).$$

Aus diesen lassen sich schnell

$${}^HC_1 = -\frac{s_3}{\alpha}; \qquad {}^HS_1 = -\frac{t_3}{\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (5.6)$$

und

$${}^FC_2^0 = uS; \qquad {}^GC_2^0 = vS; \qquad {}^HC_2^0 = wS \quad \ldots \ldots \quad (5.7)$$

finden, mit denen weiter folgende Hilfsgrößen zu bilden sind:

$$\eta = -2\,{}^GC_2^0; \qquad \vartheta = (h\beta - 1)\,{}^HC_2^0; \qquad \varepsilon = \beta\,{}^HC_2^0 \quad \ldots \ldots \quad (5.8).$$

Für $k \geqq 3$ ist die Anwendung des Schemas (4.13) nicht mehr zu umgehen. Man erhält nach möglichster Vereinfachung für die ${}^fC$, ${}^fS$, ${}^gC$, ${}^gS$ bis $k=6$ die nachstehenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll} {}^fC_3^1 = +g\eta + \Phi\vartheta; & {}^gC_3^1 = -s_2\eta + \Psi\,{}^HC_2^0; \\ {}^fS_3^1 = -f \quad + \Psi \quad ; & {}^gS_3^1 = -t_2 \quad - \Phi \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5.9).$$

(Hier wie im folgenden sind zur besseren Übersicht die ebenso wie in der ersten Zeile wiederkehrenden Faktoren in der zweiten und den weiteren Zeilen fortgelassen.)

$$\left.\begin{array}{llllllll} {}^fC_4^0 = +2s_2\,{}^FC_3^1 & +2t_2\,{}^FS_3^1 & -g\;{}^GC_3^1 & +f\;{}^GS_3^1 & -\gamma\,{}^HC_3^1 & -\delta\,{}^HS_3^1 & -{}^FC_2^{0\,2} & -{}^GC_2^{0\,2} \\ {}^gC_4^0 = +g & -f & +2s_2 & +2t_2 & -\delta & +\gamma & & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5.10).$$

$$\left.\begin{array}{lllllll} {}^fC_{k+1}^{k-1} = +s_k\,{}^FC_k^{k-2} & -t_k\,{}^FS_k^{k-2} & -g\,{}^GC_k^{k-2} & -f\,{}^GS_k^{k-2} & -\gamma\,{}^HC_k^{k-2} & +\delta\,{}^HS_k^{k-2}; \\ {}^fS_{k+1}^{k-1} = +t_k & +s_k & +f & -g & -\delta & -\gamma & ; \\ {}^gC_{k+1}^{k-1} = +g & +f & +s_k & -t_k & -\delta & -\gamma & ; \\ {}^gS_{k+1}^{k-1} = -f & +g & +t_k & +s_k & +\gamma & -\delta & \\ \text{(gültig für } k = 3, 4, 5, \ldots) & & & & & & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5.11).$$

$$\left.\begin{aligned}
{}^{f}_{a}C^{1}_{5} &= +3\,s_2\,{}^{F}C^{2}_{4} + 3\,t_2\,{}^{F}S^{2}_{4} - g\;\;{}^{G}C^{2}_{4} + f\;\;{}^{G}S^{2}_{4} - \gamma\,{}^{H}C^{2}_{4} - \delta\,{}^{H}S^{2}_{4};\\
{}^{f}_{a}S^{1}_{5} &= -3\,t_2 \quad +3\,s_2 \quad -f \quad -g \quad +\delta \quad -\gamma \quad ;\\
{}^{g}_{a}C^{1}_{5} &= +g \quad -f \quad +3\,s_2 \quad +3\,t_2 \quad -\delta \quad +\gamma \quad ;\\
{}^{g}_{a}S^{1}_{5} &= +f \quad +g \quad -3\,t_2 \quad +3\,s_2 \quad -\gamma \quad -\delta \quad ;\\[1ex]
{}^{f}_{b}C^{1}_{5} &= -2\,g \qquad {}^{G}C^{0}_{4} + 2\,(\gamma - \lambda\,\Phi)\,{}^{H}C^{0}_{4};\\
{}^{f}_{b}S^{1}_{5} &= +2\,f \qquad\qquad +2\,(\delta - \lambda\,\Psi) \quad ;\\
{}^{g}_{b}C^{1}_{5} &= +(4\,s_3 + 2\,f) \quad +2\,(\delta + \Psi) \quad ;\\
{}^{g}_{b}S^{1}_{5} &= +(4\,t_3 + 2\,g) \quad -2\,(\gamma + \Phi) \quad ;\\[1ex]
{}^{f}C^{1}_{5} &= {}^{f}_{a}C^{1}_{5} + {}^{f}_{b}C^{1}_{5} + \left({}^{H}C^{1}_{3}\cdot 2\,\alpha + {}^{F}C^{1}_{3}\right){}^{F}C^{0}_{2} + \quad {}^{G}C^{1}_{3} \quad \cdot\eta + {}^{F}S^{1}_{3}\cdot\varepsilon;\\
{}^{f}S^{1}_{5} &= {}^{f}_{a}S^{1}_{5} + {}^{f}_{b}S^{1}_{5} - \left({}^{H}S^{1}_{3}\cdot 2\,\alpha + {}^{F}S^{1}_{3}\right) \quad + \quad {}^{G}S^{1}_{3} \quad - {}^{F}C^{1}_{3} \quad ;\\
{}^{g}C^{1}_{5} &= {}^{g}_{a}C^{1}_{5} + {}^{g}_{b}C^{1}_{5} - \quad {}^{G}C^{1}_{3} \quad + \left({}^{H}C^{1}_{3}\cdot\alpha - {}^{F}C^{1}_{3}\right) \quad + {}^{G}S^{1}_{3} \quad ;\\
{}^{g}S^{1}_{5} &= {}^{g}_{a}S^{1}_{5} = {}^{g}_{b}S^{1}_{5} - \quad {}^{G}S^{1}_{3} \quad + \left({}^{H}S^{1}_{3}\cdot\alpha - {}^{F}S^{1}_{3}\right) \quad - {}^{G}C^{1}_{3}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5.12).$$

$$\left.\begin{aligned}
{}^{f}_{a}C^{0}_{6} &= +\left(3\,s_2 - f\right){}^{F}C^{1}_{5} + \left(3\,t_2 - g\right){}^{F}S^{1}_{5} - g \quad \cdot{}^{G}C^{1}_{5} + f \quad \cdot{}^{G}S^{1}_{5} - \gamma\,{}^{H}C^{1}_{5} - \delta\,{}^{H}S^{1}_{5};\\
{}^{g}_{a}C^{0}_{6} &= +g \quad \cdot \quad -f \quad \cdot \quad +(3\,s_2 - f) \quad +(3\,t_2 - g) \quad -\delta \quad +\gamma \quad ;\\
{}^{f}C^{0}_{6} &= {}^{f}_{a}C^{0}_{6} - 3\,{}^{F}C^{0}_{2}\,{}^{F}C^{0}_{4} \qquad +\eta \quad {}^{G}C^{0}_{4} \quad + \frac{\beta^2}{y}\left({}^{F}C^{1\,2}_{3} + {}^{F}S^{1\,2}_{3}\right) \quad ;\\
{}^{g}C^{0}_{6} &= {}^{g}_{a}C^{0}_{6} + {}^{G}C^{0}_{2} \qquad -2\,{}^{F}C^{0}_{2} \quad -\beta\left(-{}^{H}C^{1}_{3}\,{}^{G}S^{1}_{3} + {}^{H}S^{1}_{3}\,{}^{G}C^{1}_{3}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (5.13);$$

y bedeutet hier den bei der Berechnung von ${}^{H}C^{1}_{3}$, ${}^{H}S^{1}_{3}$ schon aufgetretenen Ausdruck $\frac{9\,\alpha^2 + \beta^2}{2}$.

$$\left.\begin{aligned}
{}^{f}_{a}C^{2}_{6} &= +4\,s_2\,{}^{F}C^{3}_{5} + 4\,t_2\,{}^{F}S^{3}_{5} - g\;\;{}^{G}C^{3}_{5} + f\;\;{}^{G}S^{3}_{5} - \gamma\,{}^{H}C^{3}_{5} - \delta\,{}^{H}S^{3}_{5};\\
{}^{f}_{a}S^{2}_{6} &= -4\,t_2 \quad +4\,s_2 \quad -f \quad -g \quad +\delta \quad -\gamma \quad ;\\
{}^{g}_{a}C^{2}_{6} &= +g \quad -f \quad +4\,s_2 \quad +4\,t_2 \quad -\delta \quad +\gamma \quad ;\\
{}^{g}_{a}S^{2}_{6} &= +f \quad +g \quad -4\,t_2 \quad +4\,s_2 \quad -\gamma \quad -\delta \quad ;\\[1ex]
{}^{f}_{b}C^{2}_{6} &= +2\,s_3\,{}^{F}C^{1}_{5} - 2\,t_3\,{}^{F}S^{1}_{5} - g\;\;{}^{G}C^{1}_{5} \;\; -f\;\;{}^{G}S^{1}_{5} \;\; -\gamma\,{}^{H}C^{1}_{5} + \delta\,{}^{H}S^{1}_{5};\\
{}^{f}_{b}S^{2}_{6} &= +2\,t_3 \quad +2\,s_3 \quad +f \quad -g \quad -\delta \quad -\gamma \quad ;\\
{}^{g}_{b}C^{2}_{6} &= +g \quad +f \quad +2\,s_3 \quad -2\,t_3 \quad -\delta \quad -\gamma \quad ;\\
{}^{g}_{b}S^{2}_{6} &= -f \quad +g \quad +2\,t_3 \quad +2\,s_3 \quad +\gamma \quad -\delta \quad ;\\[1ex]
{}^{f}_{c}C^{2}_{6} &= -2\left({}^{F}C^{2}_{4} + \alpha\,{}^{H}C^{2}_{4}\right){}^{F}C^{0}_{2} + \quad {}^{G}C^{2}_{4} \quad \cdot\eta + {}^{F}S^{2}_{4}\cdot 2\,\varepsilon;\\
{}^{f}_{c}S^{2}_{6} &= -2\left({}^{F}S^{2}_{4} + \alpha\,{}^{H}S^{2}_{4}\right) \quad + \quad {}^{G}S^{2}_{4} \quad - {}^{F}C^{2}_{4} \quad ;\\
{}^{g}_{c}C^{2}_{6} &= -2\,{}^{G}C^{2}_{4} \qquad -\left({}^{F}C^{2}_{4} - \alpha\,{}^{H}C^{2}_{4}\right) \quad + {}^{G}S^{2}_{4} \quad ;\\
{}^{g}_{c}S^{2}_{6} &= -2\,{}^{G}S^{2}_{4} \qquad -\left({}^{F}S^{2}_{4} - \alpha\,{}^{H}S^{2}_{4}\right) \quad - {}^{G}C^{2}_{4} \quad ;\\[1ex]
{}^{f}C^{2}_{6} &= {}^{f}_{a}C^{2}_{6} + {}^{f}_{b}C^{2}_{6} + {}^{f}_{c}C^{2}_{6} + \frac{1}{2}\left(-{}^{F}C^{1\,2}_{3} + {}^{F}S^{1\,2}_{3} - {}^{G}C^{1\,2}_{3} + {}^{G}S^{1\,2}_{3}\right);\\
{}^{f}S^{2}_{6} &= {}^{f}_{a}S^{2}_{6} + {}^{f}_{b}S^{2}_{6} + {}^{f}_{c}S^{2}_{6} - {}^{F}C^{1}_{3}\,{}^{F}S^{1}_{3} - {}^{G}C^{1}_{3}\,{}^{G}S^{1}_{3};\\
{}^{g}C^{2}_{6} &= {}^{g}_{a}C^{2}_{6} + {}^{g}_{b}C^{2}_{6} + {}^{g}_{c}C^{2}_{6};\\
{}^{g}S^{2}_{6} &= {}^{g}_{a}S^{2}_{6} + {}^{g}_{b}S^{2}_{6} + {}^{g}_{c}S^{2}_{6}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5.14).$$

§ 6. Lösung der Anfangsbedingungen durch die asymptotischen Reihen. Aus (2.7), (4.2) und (4.3) ergeben sich die Anfangswerte bei $\zeta = 0$ als Summen der C-Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= 0 + f + {}^F C_2^0 + {}^F C_3^1 + ({}^F C_4^0 + {}^F C_4^2) + \cdots, \\ G(0) &= 1 + g + {}^G C_2^0 + {}^G C_3^1 + ({}^G C_4^0 + {}^G C_4^2) + \cdots, \\ H(0) &= h + {}^H C_1 + {}^H C_2^0 + {}^H C_3^1 + ({}^H C_4^0 + {}^H C_4^2) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (6.1).$$

Für die Anfangswerte der Ableitungen von $F(\zeta)$ und $G(\zeta)$ bekommt man

$$\left.\begin{aligned} A = -F'(0) &= 2\gamma + \alpha\left(2\,{}^F C_2^0 + 3\,{}^F C_3^1 + 4({}^F C_4^0 + {}^F C_4^2) + \cdots\right) \\ &\quad - \beta\left({}^F S_3^1 + 2\,{}^F S_4^2 + ({}^F S_5^1 + 3\,{}^F S_5^3) + \cdots\right); \\ B = +G'(0) &= -2\delta - \alpha\left(2\,{}^G C_2^0 + 3\,{}^G C_3^1 + 4({}^G C_4^0 + {}^G C_4^2) + \cdots\right) \\ &\quad + \beta\left({}^G S_3^1 + 2\,{}^G S_4^2 + ({}^G S_5^1 + 3\,{}^G S_5^3) + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \quad (6.2).$$

Die Abschnitte der Reihen (6.1), (6.2) bis zu den Gliedern der k-ten Stufe einschließlich sollen durch $F_{(k)}, G_{(k)}, \ldots, B_{(k)}$ bezeichnet werden. — Auch für den Quotienten A/B wird eine Bezeichnung gebraucht:

$$\frac{A}{B} = m; \quad \text{entsprechend:} \; \frac{A_{(k)}}{B_{(k)}} = m_{(k)} \quad (6.3).$$

Die Werte (6.1) sind nach § 5 Funktionen der drei Parameter f, g, h. Diese sind nach (1.8.1) so zu wählen, daß die drei Funktionen verschwinden, d. h. das Gleichungssystem (1.8.1) ist nach f, g, h aufzulösen, was hier durch fortschreitende Näherungen geschehen soll.

Zu diesem Zwecke wird zunächst das Gleichungssystem $F_{(2)} = G_{(2)} = H_{(2)} = 0$ gelöst. Ausgangswerte dafür erhält man aus dem System $F_{(1)} = f = 0$, $G_{(1)} = 1 + g = 0$, $H_{(1)} = h(1+g) + 2\delta = 0$. Aus den beiden ersten folgt $f = 0$, $g = -1$; das dritte fordert dann $\alpha = 0$. Damit α Null oder doch möglichst klein wird, muß nach (3.8), (3.9) $h \gg 0$ sein; zunächst genügt $h = 2$. Mit diesen Ausgangswerten wird das System $F_{(2)} = \cdots = 0$ nach dem Newtonschen Verfahren gelöst; für die dabei benötigten Ableitungen der drei Funktionen erhält man brauchbare analytische Ausdrücke. Nach einigen Näherungsschritten erhält man mit

$$f = -0{,}31; \quad g = -0{,}93; \quad h = +1{,}21$$

die Werte

$$F_{(2)} = +0{,}0034; \quad G_{(2)} = -0{,}0129; \quad H_{(2)} = +0{,}0008.$$

Die daraus folgenden Verbesserungen von f, g, h liegen in der Größenordnung 0,01, so daß nun die höheren Ordnungen berücksichtigt werden müssen.

Mit den zuletzt verwendeten Werten von f, g, h kommt z. B. $H_{(3)} = -0{,}0815$, $H_{(4)} = -0{,}0900$. Die hinzugekommenen Glieder sind also keinesfalls zu vernachlässigen. Formeln für die Ableitungen von $F_{(4)}, \ldots$ aufzustellen, lohnt nicht bei der zu erwartenden Unhandlichkeit. Versucht man ersatzweise die formelmäßig bekannten Ableitungen von $F_{(2)}, \ldots$ zu verwenden, so zeigen sich nur langsame Fortschritte. Es empfiehlt sich daher — und zwar sogleich für $F_{(6)}, \ldots$ —, Durchschnittswerte der Ableitungen numerisch zu bestimmen, indem man f, g, h einzeln um passende kleine Beträge ändert und die dadurch erzeugten Änderungen der Funktionswerte feststellt. Die so einmal ermittelten Werte für die Ableitungen werden dann bei den weiteren Näherungen unverändert weiter verwandt.

Bestimmt man so einmal zu den Werten

$$f = -0{,}3164; \quad g = -1{,}0106; \quad h = +1{,}3252$$

die Funktionswerte $F_{(6)}, \ldots, m_{(6)}$ (auf der vollautomatischen Mercedes-Euklid-Rechenmaschine waren dazu etwa 10 Stunden erforderlich), so zeigt eine Betrachtung der Wertfolgen $F_{(2)}, F_{(3)}, \ldots, F_{(6)}; \ldots m_{(6)}$, daß die Glieder der sechsten Ordnung unentbehrlich sind, wenn der Fehler der Funktionswerte nur die Größenordnung 0,01 haben darf, daß aber andererseits eine Weiterführung der Rechnung bis zur 7. Stufe, wodurch sich die Rechenarbeit etwa verdoppeln würde, keinen wesentlichen Gewinn an Genauigkeit verspricht.

Anhaltswerte für die zweckmäßige Größe der Variationen von f, g, h ergaben sich aus den Ableitungen von $F_{(2)}, \ldots$. Aus den so erhaltenen Durchschnittswerten für $\frac{\partial F_{(6)}}{\partial f}, \ldots \frac{\partial H_{(6)}}{\partial h}$ wurden durch Umkehrung der Matrix die Werte für $\frac{\partial f}{\partial F_{(6)}} = f_F, \ldots, h_H$. Diese liefern zu

den Werten der Funktionen $F_{(6)}, \ldots$ die Verbesserungen von f, g, h. Eine Wiederholung des Rechnungsganges führte zu den Werten

$$f = -0{,}2475; \quad g = -1{,}0569; \quad h = +1{,}3548,$$

deren Durchrechnung die Ergebnisse

$$\left.\begin{array}{lll} F_{(6)} = +0{,}0003; & G_{(6)} = +0{,}0000; & H_{(6)} = +0{,}0002; \\ A_{(6)} = +0{,}9623; & B_{(6)} = +0{,}7662; & m_{(6)} = +1{,}2559 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.5)$$

brachte. Aufzeichnung der Reihen $F_{(k)}, \ldots, m_{(k)}$ gestattete eine, wenn auch rohe Schätzung der Restglieder: ihre Größenordnung liegt für $F(0)$, $G(0)$, $H(0)$ bei etwa $-0{,}01$, für m bei etwa $-0{,}025$. Der Fehler der aus den Größen (6.4) berechneten Funktionswerte $F(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ kann demnach bis zu etwa $\pm 0{,}03$ ansteigen.

§ 7. Genauere Lösung durch Mitverwendung der Potenzreihen. Eine größere Genauigkeit läßt sich erreichen, indem man für $0 \leqq \zeta \leqq 1$ die Potenzreihen (2.1) verwendet, für $1 \leqq \zeta < \infty$ die asymptotischen Reihen; denn wegen der Faktoren $e^{-k\alpha\zeta}$ konvergieren diese bei $\zeta = 1$ schon wesentlich besser als bei $\zeta = 0$. Als Ausgangswerte wurden nicht die zuletzt erhaltenen Werte (6.4), (6.5) genommen, sondern benachbarte Werte auf Grund einer Schätzung des Einflusses der vernachlässigten Restglieder. Für die Exponentialreihen wurden gewählt:

$$f = -0{,}23; \quad g = -1{,}04; \quad h = +1{,}34;$$

damit wurden an der Stelle $\zeta = 1$ die Werte

$$F(1),\ G(1),\ H(1),\ F'(1),\ G'(1)$$

berechnet. Für die Potenzreihen wurde ausgegangen von

$$A = +0{,}96; \quad B = +0{,}77.$$

Damit wurden für $\zeta = 1$ dieselben Größen berechnet; die erhaltenen Werte wurden zum Unterschied mit einem Stern versehen:

$$F(1)^*,\ G(1)^*,\ H(1)^*,\ F'(1)^*,\ G'(1)^*.$$

Die Differenzen zwischen beiden Wertegruppen

$$L_1 = F(1) - F(1)^*; \quad \ldots; \quad L_5 = G'(1) - G'(1)^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.1)$$

beliefen sich bei den oben für f, g, h, A, B angenommenen Werten auf:

$$L_1 = +0{,}021852; \quad L_2 = +0{,}001417; \quad L_3 = -0{,}031872;$$
$$L_4 = +0{,}013329; \quad L_5 = +0{,}004559.$$

Sobald diese Differenzen verschwinden, müssen die Potenzreihen wie die Exponentialreihen dieselbe, allen Randbedingungen (1.8) genügende Lösung der Differentialgleichungen (1.7) darstellen. Es war also das Gleichungssystem $L_1 = L_2 = \ldots = L_5 = 0$ nach f, g, h, A, B aufzulösen. Das geschah wiederum nach dem Newtonschen Verfahren; Durchschnittswerte für die Verbesserungskoeffizienten wurden gewonnen, indem die oben gewählten Werte der 5 Parameter einzeln um $-0{,}01$; $-0{,}01$; $+0{,}01$; $-0{,}01$; $+0{,}01$ abgeändert wurden. Dreimalige Anwendung des Newtonschen Verfahrens lieferte die Zahlen

$$\left.\begin{array}{lll} A = +0{,}941966; & B = +0{,}773242; & \\ f = -0{,}238891; & g = -1{,}048332; & h = +1{,}348831 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.2),$$

die zu den Differenzen

$$L_1 = -0{,}000000; \quad L_2 = +0{,}000349; \quad L_3 = -0{,}000009;$$
$$L_4 = -0{,}000016; \quad L_5 = -0{,}000022$$

führten. Dabei haben die letzten berücksichtigten Reihenglieder (von den Potenzreihen wurden die in der Tafel 1 mitgeteilten Koeffizienten verwendet) zu diesen Differenzen noch Beiträge von etwa der Größe

$$L_1: +0{,}00017; \quad L_2: +0{,}00030; \quad L_3: +0{,}00016;$$
$$L_4: +0{,}00008; \quad L_5: +0{,}00066$$

gegeben. Die Restglieder der Reihen werden höchstens dieselbe Größenordnung haben. Die nächsten Verbesserungen wären für

$$A: -0{,}000069; \quad B: +0{,}000297;$$
$$f: +0{,}000129; \quad g: -0{,}000500; \quad h: +0{,}000363,$$

so daß die Werte (7.2) schon bis auf etwa eine Einheit der dritten Stelle richtig sind. Damit haben die aus ihnen berechneten Reihenkoeffizienten, die in Zahlentafel 2 zusammengestellt sind, die entsprechende Genauigkeit, und die daraus berechneten Funktionswerte (Zahlentafel 3, Bild 1) haben ebenfalls höchstens einen Fehler der Größe 0,002. Zu größeren Beträgen können sich die Ungenauigkeiten der Anfangswerte nicht summieren, weil alle sonstigen Abrundungsfehler vermieden worden sind: die Sinus- und Kosinuswerte sind einer sechsstelligen Tafel entnommen, und im übrigen wurde die ganze Rechnung achtstellig durchgeführt.

Zahlentafel 2.

Die Koeffizienten der Exponentialreihen.

$f = -0,2389$ $g = -1,0483$ $h = +1,3488$

$\alpha = +0,4449$ $\beta = +0,8934$

${}^HC_1 = -2,0939$ ${}^HS_1 = -0,5080$

${}^FC_2^0 = +0,4057$	${}^GC_2^0 = -0,0558$	${}^HC_2^0 = +0,9118$
${}^FC_3^1 = -0,1622$	${}^GC_3^1 = +0,1024$	${}^HC_3^1 = -0,1553$
${}^FS_3^1 = +0,0182$	${}^GS_3^1 = +0,2556$	${}^HS_3^1 = +0,1311$
${}^FC_4^0 = -0,0366$	${}^GC_4^0 = -0,0316$	${}^HC_4^0 = -0,0412$
${}^FC_4^2 = +0,0135$	${}^GC_4^2 = +0,0242$	${}^HC_4^2 = +0,0106$
${}^FS_4^2 = +0,0054$	${}^GS_4^2 = -0,0075$	${}^HS_4^2 = -0,0046$
${}^FC_5^1 = +0,0162$	${}^GC_5^1 = +0,0111$	${}^HC_5^1 = +0,0189$
${}^FS_5^1 = +0,0203$	${}^GS_5^1 = -0,0258$	${}^HS_5^1 = +0,0107$
${}^FC_5^3 = +0,0013$	${}^GC_5^3 = +0,0013$	${}^HC_5^3 = -0,0003$
${}^FS_5^3 = -0,0017$	${}^GS_5^3 = -0,0019$	${}^HS_5^3 = -0,0012$
${}^FC_6^0 = +0,0065$	${}^GC_6^0 = +0,0051$	${}^HC_6^0 = +0,0049$
${}^FC_6^2 = +0,0002$	${}^GC_6^2 = -0,0059$	${}^HC_6^2 = -0,0013$
${}^FS_6^2 = -0,0040$	${}^GS_6^2 = -0,0027$	${}^HS_6^2 = -0,0021$
${}^FC_6^4 = -0,0001$	${}^GC_6^4 = +0,0000$	${}^HC_6^4 = -0,0001$
${}^FS_6^4 = -0,0003$	${}^GS_6^4 = -0,0002$	${}^HS_6^4 = -0,0001$

Zahlentafel 3.

Die Funktionen $F(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$.

ζ	$F(\zeta)$	$G(\zeta)$	$H(\zeta)$
0.0	0.000	0.000	0.000
0.5	− 0.349	+ 0.383	+ 0.194
1.0	− 0.484	+ 0.736	+ 0.624
1.5	− 0.450	+ 1.014	+ 1.099
2.0	− 0.329	+ 1.193	+ 1.493
2.5	− 0.176	+ 1.272	+ 1.746
3.0	− 0.036	+ 1.272	+ 1.849
3.5	+ 0.067	+ 1.218	+ 1.830
4.0	+ 0.123	+ 1.141	+ 1.732
4.5	+ 0.137	+ 1.064	+ 1.599
5.0	+ 0.121	+ 1.002	+ 1.468
5.5	+ 0.088	+ 0.961	+ 1.362
6.0	+ 0.050	+ 0.943	+ 1.294
6.5	+ 0.016	+ 0.942	+ 1.261
7.0	− 0.008	+ 0.953	+ 1.258
7.5	− 0.022	+ 0.969	+ 1.275
8.0	− 0.027	+ 0.986	+ 1.300
8.5	− 0.024	+ 0.999	+ 1.326
9.0	− 0.018	+ 1.008	+ 1.347
9.5	− 0.010	+ 1.012	+ 1.361
10.0	− 0.003	+ 1.012	+ 1.368
10.5	+ 0.002	+ 1.010	+ 1.368
11.0	+ 0.005	+ 1.007	+ 1.365
11.5	+ 0 006	+ 1.003	+ 1.359
12.0	+ 0.005	+ 1.000	+ 1.354
12.5	+ 0.004	+ 0.998	+ 1.349
∞	0.000	+ 1.000	+ 1.349

Zu den Werten der Zahlentafel 3 ist noch zu bemerken: Die ersten sechs Reihenglieder geben nicht genau den Sollwert 0; ihre Summen sind vielmehr

$$F_{(6)} = +0.0057; \quad G_{(6)} = +0.0025; \quad H_{(6)} = +0.0030.$$

Daher wurde für das Restglied die negative 6. Teilsumme als Wert angenommen, so daß sich durch seine Hinzufügung bei $\zeta = 0$ die Funktionswerte 0 ergaben. Nun enthalten die Summanden, aus denen die Restglieder sich zusammensetzen, alle den Exponentialfaktor $e^{-\alpha\zeta}$ in 7. oder höherer Potenz; daher wurde bei den folgenden Argumentwerten als Ersatzwert für das Restglied sein mit $e^{-7\alpha\zeta}$ vervielfachter Wert bei $\zeta = 0$ hinzugefügt, wodurch aber für $\zeta \geqq 2$ die vierte Stelle nicht mehr beeinflußt worden ist. Alle Werte der Zahlentafel 3 wurden dann auf drei Stellen abgerundet. Die drei Funktionen entfernen sich für $\zeta \geqq 12.5$ nur noch weniger als um 0.005 von ihren Endwerten 0, 1, h.

§ 8. Erörterung der Ergebnisse. Die horizontale Geschwindigkeitskomponente ist nach (1.3), (1.6) durch $u = r\,\omega\,F(\zeta)$, $v = r\,\omega\,G(\zeta)$ gegeben, der Winkel zwischen Strömungsrichtung und Radius ist also nur von der Höhe $z = \sqrt{\nu/\omega}\,\zeta$ abhängig; die Projektionen der Strömung sind daher in jeder Höhe logarithmische Spiralen vom Steigungsmaß $\dfrac{u}{v} = \dfrac{F(\zeta)}{G(\zeta)}$ gegen die Tangente. Die mit der Höhe sich ändernden Strömungsrichtungen sind in Bild 2 dargestellt. Am Boden ist die Abweichung von der Tangentenrichtung einwärts am größten: die Steigung beträgt dort $\dfrac{F'(0)}{G'(0)} = -m = -1{,}218$, entsprechend einem Winkel von $50{,}6^{\circ}$. Die größte Abweichung auswärts findet sich bei $\zeta = 4{,}63$; ihr Steigungsmaß ist $+0{,}129$, was einem Winkel von $7{,}4^{\circ}$ entspricht. Demnach sind die Strömungsrichtungen in höheren Schichten bis zu 58° gegen die Strömungsrichtung am Boden nach auswärts gedreht. — In noch größerer Höhe

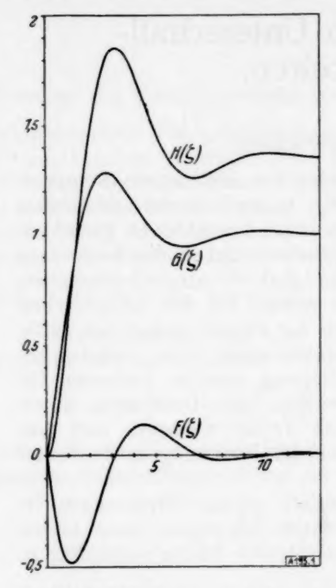


Bild 1 (links).
Die Funktionen $F(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$.

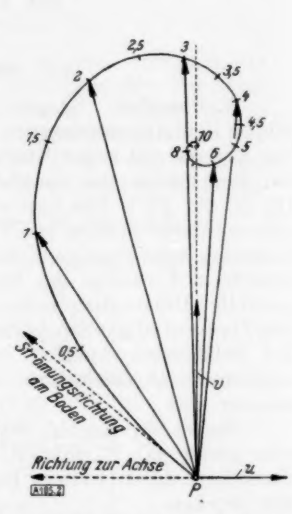


Bild 2 (rechts).
Die Horizontalkomponenten der Geschwindigkeit über einem Punkte P der Grundebene als Funktion der Höhe ζ.

dreht die Strömung wieder einwärts und erreicht bei etwa $\zeta = 8{,}06$ noch einmal einen Extremwert mit einer Abweichung von 1,6° einwärts. Fortan wechseln mit weiterem Anfsteigen um je

$$\Delta z = \sqrt{\nu/\omega}\,\Delta\zeta = \sqrt{\nu/\omega}\,\frac{\pi}{\beta} = 3{,}60\sqrt{\nu/\omega} \quad \ldots \quad (8.1)$$

größte Abweichungen auswärts mit solchen einwärts ab, doch nimmt ihr Betrag jedesmal mit dem Faktor $e^{-\pi\frac{\alpha}{\beta}} = 0{,}21$ ab, so daß alle diese weiteren Abweichungen zu vernachlässigen sind. In diesen großen Höhen hat die Strömung praktisch schon überall die durch (1.8.2) geforderte Richtung der Tangente an die Kreise um die Achse $r = 0$.

Auch die senkrechte Geschwindigkeitskomponente ist vom Ort auf der Grundfläche nach (1.3), (1.6) nicht abhängig, sondern nur von der Höhe. Die zu einer Zeit t_1 in einer waagerechten Ebene in der Höhe $z_1 = \sqrt{\nu/\omega}\,\zeta_1$ befindlichen Flüssigkeitsteilchen erreichen daher alle zu gleicher Zeit t_2 die Ebene in der Höhe $z_2\sqrt{\nu/\omega}\,\zeta_2$; die darüber verstrichene Zeit ist durch

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{H(\zeta)} \quad \ldots \quad (8.2)$$

gegeben. Die stärkste Aufwärtsbewegung findet in der Höhe $\zeta = 3{,}31$ statt: dort ist $w = 1{,}853\sqrt{\nu\omega}$.

Während des Aufsteigens von der Höhe z_1 zur Höhe z_2 bewirkt die Strömungskomponente v eine Drehung um die Achse von der Größe

$$a_2 - a_1 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{G(\zeta)}{H(\zeta)}\,d\zeta \quad \ldots \quad (8.3).$$

Hier wie auch in (8.2) kann für ζ_1 nicht der Wert 0 eingesetzt werden, weil am Boden nach (1.7.3), (1.8.1) $H'(0) = 0$ ist, die Integrale also divergieren würden. — Setzt man in (8.3) für $G(\zeta)$ und $H(\zeta)$ ihre Grenzwerte ein, so erhält man den in großen Höhen bei einem vollen Umlauf um die Achse zu überwindenden Höhenunterschied zu

$$\Delta z = \sqrt{\nu/\omega}\,\Delta\zeta = \sqrt{\nu/\omega}\,2\pi h = 8{,}67\sqrt{\nu/\omega} \quad \ldots \quad (8.4);$$

die währenddessen vergangene Zeit ist $\Delta t = 2\pi/\omega$. Diese während eines Umlaufs um die Achse erstiegene Höhe ist zu unterscheiden von der oben angegebenen Höhe $\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{\nu/\omega} = 7{,}20\sqrt{\nu/\omega}$, um die sich ein Teilchen gehoben hat zwischen zwei gleichsinnigen stärksten Abweichungen seiner Bewegungsrichtung von der genauen Tangentenrichtung; unterdessen vergehen also $0{,}83 = \text{rund}\ \frac{5}{6}$ Umläufe.

so daß die Werte (7.2) schon bis auf etwa eine Einheit der dritten Stelle richtig sind. Damit haben die aus ihnen berechneten Reihenkoeffizienten, die in Zahlentafel 2 zusammengestellt sind, die entsprechende Genauigkeit, und die daraus berechneten Funktionswerte (Zahlentafel 3, Bild 1) haben ebenfalls höchstens einen Fehler der Größe 0,002. Zu größeren Beträgen können sich die Ungenauigkeiten der Anfangswerte nicht summieren, weil alle sonstigen Abrundungsfehler vermieden worden sind: die Sinus- und Kosinuswerte sind einer sechsstelligen Tafel entnommen, und im übrigen wurde die ganze Rechnung achtstellig durchgeführt.

Zahlentafel 2.

Die Koeffizienten der Exponentialreihen.

$f = -0{,}2389 \qquad g = -1{,}0483 \qquad h = +1{,}3488$

$\alpha = +0{,}4449 \qquad \beta = +0{,}8934$

${}^{H}C_1 = -2{,}0939 \qquad {}^{H}S_1 = -0{,}5080$

${}^{F}C_2^0 = +0{,}4057$	${}^{G}C_2^0 = -0{,}0558$	${}^{H}C_2^0 = +0{,}9118$
${}^{F}C_3^1 = -0{,}1622$	${}^{G}C_3^1 = +0{,}1024$	${}^{H}C_3^1 = -0{,}1553$
${}^{F}S_3^1 = +0{,}0182$	${}^{G}S_3^1 = +0{,}2556$	${}^{H}S_3^1 = +0{,}1311$
${}^{F}C_4^0 = -0{,}0366$	${}^{G}C_4^0 = -0{,}0316$	${}^{H}C_4^0 = -0{,}0412$
${}^{F}C_4^2 = +0{,}0135$	${}^{G}C_4^2 = +0{,}0242$	${}^{H}C_4^2 = +0{,}0106$
${}^{F}S_4^2 = +0{,}0054$	${}^{G}S_4^2 = -0{,}0075$	${}^{H}S_4^2 = -0{,}0046$
${}^{F}C_5^1 = +0{,}0162$	${}^{G}C_5^1 = +0{,}0111$	${}^{H}C_5^1 = +0{,}0189$
${}^{F}S_5^1 = +0{,}0203$	${}^{G}S_5^1 = -0{,}0258$	${}^{H}S_5^1 = +0{,}0107$
${}^{F}C_5^3 = +0{,}0013$	${}^{G}C_5^3 = +0{,}0013$	${}^{H}C_5^3 = -0{,}0003$
${}^{F}S_5^3 = -0{,}0017$	${}^{G}S_5^3 = -0{,}0019$	${}^{H}S_5^3 = -0{,}0012$
${}^{F}C_6^0 = +0{,}0065$	${}^{G}C_6^0 = +0{,}0051$	${}^{H}C_6^0 = +0{,}0049$
${}^{F}C_6^2 = +0{,}0002$	${}^{G}C_6^2 = -0{,}0059$	${}^{H}C_6^2 = -0{,}0013$
${}^{F}S_6^2 = -0{,}0040$	${}^{G}S_6^2 = -0{,}0027$	${}^{H}S_6^2 = -0{,}0021$
${}^{F}C_6^4 = -0{,}0001$	${}^{G}C_6^4 = +0{,}0000$	${}^{H}C_6^4 = -0{,}0001$
${}^{F}S_6^4 = -0{,}0003$	${}^{G}S_6^4 = -0{,}0002$	${}^{H}S_6^4 = -0{,}0001$

Zahlentafel 3.

Die Funktionen $F(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$.

ζ	$F(\zeta)$	$G(\zeta)$	$H(\zeta)$
0.0	0.000	0.000	0.000
0.5	− 0.349	+ 0.383	+ 0.194
1.0	− 0.484	+ 0.736	+ 0.624
1.5	− 0.450	+ 1.014	+ 1.099
2.0	− 0.329	+ 1.193	+ 1.493
2.5	− 0.176	+ 1.272	+ 1.746
3.0	− 0.036	+ 1.272	+ 1.849
3.5	+ 0.067	+ 1.218	+ 1.830
4.0	+ 0.123	+ 1.141	+ 1.732
4.5	+ 0.137	+ 1.064	+ 1.599
5.0	+ 0.121	+ 1.002	+ 1.468
5.5	+ 0.088	+ 0.961	+ 1.362
6.0	+ 0.050	+ 0.943	+ 1.294
6.5	+ 0.016	+ 0.942	+ 1.261
7.0	− 0.008	+ 0.953	+ 1.258
7.5	− 0.022	+ 0.969	+ 1.275
8.0	− 0.027	+ 0.986	+ 1.300
8.5	− 0.024	+ 0.999	+ 1.326
9.0	− 0.018	+ 1.008	+ 1.347
9.5	− 0.010	+ 1.012	+ 1.361
10.0	− 0.003	+ 1.012	+ 1.368
10.5	+ 0.002	+ 1.010	+ 1.368
11.0	+ 0.005	+ 1.007	+ 1.365
11.5	+ 0.006	+ 1.003	+ 1.359
12.0	+ 0.005	+ 1.000	+ 1.354
12.5	+ 0.004	+ 0.998	+ 1.349
∞	0.000	+ 1.000	+ 1.349

Zu den Werten der Zahlentafel 3 ist noch zu bemerken: Die ersten sechs Reihenglieder geben nicht genau den Sollwert 0; ihre Summen sind vielmehr

$$F_{(6)} = +0.0057; \qquad G_{(6)} = +0.0025; \qquad H_{(6)} = +0.0030.$$

Daher wurde für das Restglied die negative 6. Teilsumme als Wert angenommen, so daß sich durch seine Hinzufügung bei $\zeta = 0$ die Funktionswerte 0 ergaben. Nun enthalten die Summanden, aus denen die Restglieder sich zusammensetzen, alle den Exponentialfaktor $e^{-\alpha\zeta}$ in 7. oder höherer Potenz; daher wurde bei den folgenden Argumentwerten als Ersatzwert für das Restglied sein mit $e^{-7\alpha\zeta}$ vervielfachter Wert bei $\zeta = 0$ hinzugefügt, wodurch aber für $\zeta \geqq 2$ die vierte Stelle nicht mehr beeinflußt worden ist. Alle Werte der Zahlentafel 3 wurden dann auf drei Stellen abgerundet. Die drei Funktionen entfernen sich für $\zeta \geqq 12.5$ nur noch weniger als um 0.005 von ihren Endwerten 0, 1, h.

§ 8. Erörterung der Ergebnisse. Die horizontale Geschwindigkeitskomponente ist nach (1.3), (1.6) durch $u = r\,\omega\,F(\zeta)$, $v = r\,\omega\,G(\zeta)$ gegeben, der Winkel zwischen Strömungsrichtung und Radius ist also nur von der Höhe $z = \sqrt{\nu/\omega}\,\zeta$ abhängig; die Projektionen der Strömung sind daher in jeder Höhe logarithmische Spiralen vom Steigungsmaß $\dfrac{u}{v} = \dfrac{F(\zeta)}{G(\zeta)}$ gegen die Tangente. Die mit der Höhe sich ändernden Strömungsrichtungen sind in Bild 2 dargestellt. Am Boden ist die Abweichung von der Tangentenrichtung einwärts am größten: die Steigung beträgt dort $\dfrac{F'(0)}{G'(0)} = -m = -1{,}218$, entsprechend einem Winkel von 50,6°. Die größte Abweichung auswärts findet sich bei $\zeta = 4{,}63$; ihr Steigungsmaß ist $+0{,}129$, was einem Winkel von 7,4° entspricht. Demnach sind die Strömungsrichtungen in höheren Schichten bis zu 58° gegen die Strömungsrichtung am Boden nach auswärts gedreht. — In noch größerer Höhe

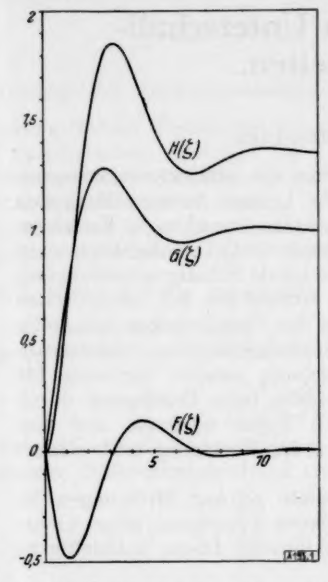


Bild 1 (links).
Die Funktionen $F(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$.

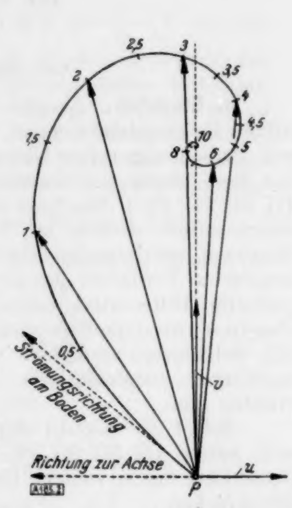


Bild 2 (rechts).
Die Horizontalkomponenten der Geschwindigkeit über einem Punkte P der Grundebene als Funktion der Höhe ζ.

dreht die Strömung wieder einwärts und erreicht bei etwa $\zeta = 8{,}06$ noch einmal einen Extremwert mit einer Abweichung von 1,6° einwärts. Fortan wechseln mit weiterem Anfsteigen um je

$$\Delta z = \sqrt{\nu/\omega}\,\Delta\zeta = \sqrt{\nu/\omega}\,\frac{\pi}{\beta} = 3{,}60\sqrt{\nu/\omega} \quad \text{(8.1)}$$

größte Abweichungen auswärts mit solchen einwärts ab, doch nimmt ihr Betrag jedesmal mit dem Faktor $e^{-\pi\frac{\alpha}{\beta}} = 0{,}21$ ab, so daß alle diese weiteren Abweichungen zu vernachlässigen sind. In diesen großen Höhen hat die Strömung praktisch schon überall die durch (1.8.2) geforderte Richtung der Tangente an die Kreise um die Achse $r = 0$.

Auch die senkrechte Geschwindigkeitskomponente ist vom Ort auf der Grundfläche nach (1.3), (1.6) nicht abhängig, sondern nur von der Höhe. Die zu einer Zeit t_1 in einer waagerechten Ebene in der Höhe $z_1 = \sqrt{\nu/\omega}\,\zeta_1$ befindlichen Flüssigkeitsteilchen erreichen daher alle zu gleicher Zeit t_2 die Ebene in der Höhe $z_2 \sqrt{\nu/\omega}\,\zeta_2$; die darüber verstrichene Zeit ist durch

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{H(\zeta)} \quad \text{(8.2)}$$

gegeben. Die stärkste Aufwärtsbewegung findet in der Höhe $\zeta = 3{,}31$ statt: dort ist $w = 1{,}853\sqrt{\nu\omega}$.

Während des Aufsteigens von der Höhe z_1 zur Höhe z_2 bewirkt die Strömungskomponente v eine Drehung um die Achse von der Größe

$$a_2 - a_1 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{G(\zeta)}{H(\zeta)}\,d\zeta \quad \text{(8.3).}$$

Hier wie auch in (8.2) kann für ζ_1 nicht der Wert 0 eingesetzt werden, weil am Boden nach (1.7.3), (1.8.1) $H'(0) = 0$ ist, die Integrale also divergieren würden. — Setzt man in (8.3) für $G(\zeta)$ und $H(\zeta)$ ihre Grenzwerte ein, so erhält man den in großen Höhen bei einem vollen Umlauf um die Achse zu überwindenden Höhenunterschied zu

$$\Delta z = \sqrt{\nu/\omega}\,\Delta\zeta = \sqrt{\nu/\omega}\,2\pi h = 8{,}67\sqrt{\nu/\omega} \quad \text{(8.4);}$$

die währenddessen vergangene Zeit ist $\Delta t = 2\pi/\omega$. Diese während eines Umlaufs um die Achse erstiegene Höhe ist zu unterscheiden von der oben angegebenen Höhe $\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{\nu/\omega} = 7{,}20\sqrt{\nu/\omega}$, um die sich ein Teilchen gehoben hat zwischen zwei gleichsinnigen stärksten Abweichungen seiner Bewegungsrichtung von der genauen Tangentenrichtung; unterdessen vergehen also $0{,}83 = \text{rund } \frac{5}{6}$ Umläufe.

Gasströmungen mit Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten.

Von *H. Görtler* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

1. Überblick. Es gibt brauchbare Methoden zur Berechnung von stationären kompressiblen Potentialströmungen mit kleinen Machschen Zahlen $M<1$, noch bessere Methoden zur Berechnung reiner Überschallströmungen, aber es gibt noch keine brauchbaren Verfahren zur Berechnung von Gasströmungen, welche die lokale Schallgeschwindigkeit durchschreiten [1], [2], [5], [6][1]). Das liegt einmal daran, daß, sobald irgendwo die lokale Schallgeschwindigkeit überschritten worden ist, Verdichtungsstöße auftreten können, worauf die mit analytischen Ansätzen operierenden Verfahren versagen; zum anderen liegt der Grund selbst bei völlig regulärem Verhalten der Strömung in der mathematischen Schwierigkeit, eine nichtlineare partielle Differentialgleichung (die quasilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für das Geschwindigkeitspotential der Strömung) zu behandeln, welche beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit vom elliptischen zum hyperbolischen Typus wechselt, und dies auch noch an einem Orte, der zunächst unbekannt ist und bei der Rechnung mitbestimmt werden muß.

Selbst die Anzahl der bisher gefundenen speziellen Beispiele solcher Strömungen ist sehr gering [4], [7], [8], [9], [3] und man wird sich zunächst damit begnügen, diese kleine Sammlung durch weitere Beispiele zu erweitern und so die geschilderte Lücke notdürftig zu überbrücken.

In der vorliegenden kleinen Mitteilung führt ein Iterationsverfahren zu einer gut konvergierenden Lösung für den Fall einer Gasströmung an einer welligen Wand. Als Ausgangsnäherung für die Iteration wird jene Lösung benutzt, die sich aus der bekannten, zur Prandtlschen Regel führenden Linearisierung der Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential ergibt.

2. Das Iterationsverfahren. Unter Berücksichtigung der Bedingung der Drehungsfreiheit

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

($\bar{u}, \bar{v}$ bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten in x- bzw. in der dazu senkrechten y-Richtung) lautet die einer kompressiblen Strömung zugrunde liegende Differentialgleichung bekanntlich

$$\left(1-\frac{\bar{u}^2}{c^2}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\left(1-\frac{\bar{v}^2}{c^2}\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}-\frac{2}{c^2}\bar{u}\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=0 \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Es bedeutet c die von der jeweiligen Strömungsgeschwindigkeit abhängige örtliche Schallgeschwindigkeit. Es ist zweckmäßig, statt mit $\bar{u}$, $\bar{v}$ mit dem Geschwindigkeitspotential Φ zu rechnen, welches vermöge $\bar{u}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\bar{v}=\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ eingeführt wird. Dann wird (1) selbsttätig erfüllt und man hat es nur noch mit (2) zu tun.

Liegt eine Strömung mit $\bar{u}=U=\text{const}$, $\bar{v}=0$ vor, so gehört zu dieser eine ebenfalls konstante Schallgeschwindigkeit c_0. Die zu einer beliebigen Strömungsgeschwindigkeit $\bar{u}$, $\bar{v}$ gehörige örtliche Schallgeschwindigkeit c steht mit c_0 bei Zugrundelegung des adiabatischen Gesetzes in der Beziehung

$$\frac{c^2}{c_0^2}=1+\frac{(\varkappa-1)}{2}\frac{U^2}{c_0^2}\left(1-\frac{\bar{u}^2+\bar{v}^2}{U^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

$\varkappa=\frac{c_p}{c_v}$. Für den späteren Gebrauch merken wir uns insbesondere an, daß demnach die Schallgeschwindigkeit c_1 dort, wo die Strömungsgeschwindigkeit die zugehörige örtliche Schallgeschwindigkeit gerade erreicht, durch

$$\frac{c_1^2}{c_0^2}=\frac{2}{\varkappa+1}\left\{1+\frac{(\varkappa-1)}{2}\frac{U^2}{c_0^2}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3a)$$

gegeben ist.

Weicht eine Strömung nur geringfügig von der gleichförmigen Strömung $\bar{u}=U=\text{const}$, $\bar{v}=0$ ab, wofür wir $\bar{u}=U+u$, $\bar{v}=v$ mit $|u|\ll U$, $|v|\ll U$ schreiben, so erhält man durch Linearisierung von (2):

---

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

$$\left(1-\frac{U^2}{c_0^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4.1).$$

Vermöge der Variablensubstitution $\xi = x$, $\eta = y\sqrt{1-\frac{U^2}{c_0^2}}$ kann man (4.1) für $\frac{U}{c_0} < 1$ auf die inkompressible Potentialgleichung bezüglich ξ, η zurückführen. Dies ist die Grundlage der Prandtlschen Analogie [5]. Kennt man also die zugeordnete inkompressible Potentialströmung, so kennt man auch die gesuchte kompressible Potentialströmung — solange die zu (4.1) führende Linearisierung zulässig ist. Dies trifft für schlanke Strömungskörper, welche in Richtung ihrer Längsausdehnung angeströmt werden, zu. Nur in der Umgebung der Staupunkte ist wegen $u \approx -U$ die Voraussetzung verletzt. Die genannte Zuordnung wird unmöglich, wenn sich die Machsche Zahl $\frac{U}{c_0}$ der ungestörten Strömung dem Werte 1 nähert.

Berücksichtigt man auch die in u, v und deren Ableitungen quadratischen Glieder, so gewinnt man aus (2) unter Heranziehung von (3) die Differentialgleichung

$$\left(1-\frac{U^2}{c_0^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=(\varkappa+1)\frac{U u}{c_0^2}\frac{\partial u}{\partial x}+(\varkappa-1)\frac{U u}{c_0^2}\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{U v}{c_0^2}\frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots \quad (4.2),$$

während die Berücksichtigung auch der kubischen Glieder auf die vollständige und völlig strenge Differentialgleichung (2) führt, welche sich auch schreiben läßt:

$$\left.\begin{aligned}\left(1-\frac{U^2}{c_0^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial u}{\partial x}&\left\{(\varkappa+1)\,U u+\frac{(\varkappa+1)}{2}u^2+\frac{(\varkappa-1)}{2}v^2\right\}\\ +\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial v}{\partial y}&\left\{(\varkappa-1)\,U u+\frac{(\varkappa-1)}{2}u^2+\frac{(\varkappa+1)}{2}v^2\right\}\\ +\frac{2}{c_0^2}\frac{\partial u}{\partial y}&\left\{U v+u v\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4.3).$$

Wir haben diese beiden Gl. (4.2) und (4.3) so geschrieben, daß rechts beidemal jene Glieder stehen, die gegenüber (4.1) hinzukommen.

Der Gedanke der Herstellung einer Lösung durch Iteration wird nun so verwirklicht, daß zunächst das ins Auge gefaßte Problem auf Grund der linearisierten Gl. (4.1) gelöst wird. Die erhaltene Lösung Φ_1 bzw. u_1, v_1 wird als erste Näherung benutzt und in die rechte Seite von (4.2) eingeführt. Die Lösung der so entstehenden linearen inhomogenen Differentialgleichung liefert die zweite Näherung $\Phi_1+\Phi_2$. Für den nächsten Iterationsschritt hat man bereits die volle Gl. (4.3) zu verwenden, denn die in der rechten Seite von (4.2) entstehenden neuen Störungsglieder für eine dritte Näherung wären bereits von derselben Ordnung wie in (4.3) hinzukommende kubische Glieder. Alle weiteren Iterationsschritte spielen sich also in der vollen Gl. (4.3) ab, wobei jeweils die zuletzt berechnete n-te Näherung in die rechte Seite einzusetzen ist, worauf die neue $(n+1)$-te Näherung aus der entstehenden linearen inhomogenen Gleichung zu berechnen ist.

Ist die Größenordnung der auf U bezogenen ersten Korrektur u_1, v_1 der Geschwindigkeitskomponenten durch den kleinen Parameter a gegeben, wird also die erste Näherung durch einen in a linearen Ausdruck gegeben, so bringt die zweite Näherung zusätzliche in a quadratische Glieder, die dritte Näherung bringt Terme in a^3 aber auch zugleich höhere Potenzen in a. Es ist zweckmäßig, für die dritte Näherung nur Glieder bis zur Potenz a^3 auf der rechten Seite von (4.3) zu berücksichtigen und die höheren Potenzen zu streichen. Die gestrichenen Glieder in a^4 kommen dann mit allen weiteren Gliedern 4. Grades in a zusammen bei der Berechnung der vierten Näherung herein. Verfährt man entsprechend bei allen weiteren Schritten, so erhält man bei jedem Iterationsschritt gerade ein gesamtes weiteres Reihenglied in der Potenzreihe der Lösung nach dem Störungsparameter a. In dieser Weise soll im folgenden verfahren werden.

3. Beispiel: Strömung längs einer welligen Wand. Es kam uns bei den im folgenden darzulegenden Rechnungen lediglich darauf an, irgendein einfaches Beispiel praktisch durchzurechnen und damit das Iterationsverfahren zur Ergänzung der einleitend genannten Beispielsammlung heranzuziehen. Die Rechnung wurde daher darauf angelegt, einen gut konvergierenden Fall zu finden. Man konnte erwarten, daß eine Strömung, welche um die gleichförmige Strömung $\bar{u}=U=\text{const}$, $\bar{v}=0$ oszilliert, ohne durch vorhandene Staupunkte an einzelnen Stellen allzu stark von dieser abzuweichen, für unser Iterationsverfahren besonders geeignet ist, da dann bereits die linearisierte Gl. (4.1) in allen Punkten der Strömung eine Näherung liefert. Es wurde daher das Beispiel einer Strömung an einer welligen Wand gewählt.

Eine Lösung von (4.1), welche eine solche Strömung darstellt, ist bekannt und lautet:

$$\Phi = U x + a_1 e^{-\mu \frac{2\pi}{l} y} \cos \frac{2\pi x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

worin $\mu = \sqrt{1 - M^2}$, M die Machsche Zahl der ungestörten Strömung: $M = \frac{U}{c_0}$, l die Wellenlänge der Wandwellen und a_1 eine Konstante bezeichnen. Für $M < 1$ — und wir beschränken uns zunächst hierauf — erhält man eine Stromlinienverteilung mit schwachen Wellen, welche mit wachsendem y abklingen und eine gute Näherung darstellen, solange a_1 hinreichend klein ist. Man kann etwa die um $y = 0$ oszillierende Stromlinie als Wand wählen und sich auf die Strömung oberhalb dieser Wellenlinie beschränken.

Bevor wir die Näherung (5) als erste Näherung für das oben geschilderte Iterationsverfahren verwenden, führen wir folgende dimensionslose Größen ein:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2\pi}{l} x, & \eta &= \frac{2\pi}{l} y; \\ \varphi &= \frac{2\pi\Phi}{c_1 l}, & a &= \frac{2\pi}{c_0 l} a_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Darin ist c_1 aus (3a) zu entnehmen. Die sich ergebenden Geschwindigkeiten in der weiteren Rechnung sind gemäß der Definition von φ auf c_1 bezogen.

Die Iteration liefert schrittweise die aufeinanderfolgenden Glieder der Potenzreihe

$$\varphi = \frac{U}{c_1} \xi + a \varphi_1 + a^2 \varphi_2 + a^3 \varphi_3 + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7),$$

wobei zur eindeutigen Festlegung der $\varphi_\nu(\xi, \eta)$ die Erfüllung von Rand- oder sonstigen die gewünschte Lösung charakterisierenden Bedingungen erforderlich ist. Da es uns, wie bereits oben bemerkt, nur auf die Herstellung eines gut konvergierenden Beispiels ankam, haben wir nicht die Wand in bestimmter Weise vorgegeben, sondern die gesuchte Lösung eindeutig durch die Forderungen charakterisiert[2]):

$$\varphi(\xi, 0) = \frac{U}{c_1} \xi + a \cos \xi, \qquad \varphi(\xi, \infty) = \frac{U}{c_1} \xi \quad \ldots \ldots \ldots (8).$$

Diese Bedingungen werden bereits durch die erste Näherung $\frac{U}{c_1} \xi + a \varphi_1$ erfüllt. Man hat also zu fordern, daß $\varphi_\nu(\xi, 0) = 0$, $\varphi_\nu(\xi, \infty) = 0$ für $\nu = 2, 3, \ldots$

Das Iterationsverfahren liefert bis zur dritten Näherung einschließlich das Ergebnis:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 e^{-\mu\eta} \cos \xi, \\ \varphi_2 &= A_2 \eta e^{-2\mu\eta} \sin 2\xi, \\ \varphi_3 &= \{A_3 (e^{-3\mu\eta} - e^{-\mu\eta}) + B_3 \eta e^{-3\mu\eta}\} \cos \xi + \{C_3 \eta + D_3 \eta^2\} e^{-3\mu\eta} \cos 3\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots (9).$$

Darin sind die Koeffizienten gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{c_0}{c_1}, \\ A_2 &= -\frac{c_0}{c_1} \frac{(\varkappa + 1)}{8} \frac{M^3}{\mu}, \\ A_3 &= \frac{c_0}{c_1} \frac{1}{256 \mu^4} \{-3 (\varkappa + 1)^2 M^4 + (\varkappa + 1)(3 - 5\varkappa) M^4 \mu^2 - 4 (\varkappa + 1) \mu^2 \\ &\qquad - 8 (\varkappa - 3) \mu^4 + 12 (\varkappa + 1) \mu^6\}, \\ B_3 &= -\frac{c_0}{c_1} \frac{(\varkappa + 1)}{64} \frac{M^4}{\mu^3} \{\varkappa + 1 - (\varkappa - 3) \mu^2\}, \\ C_3 &= \frac{c_0}{c_1} \frac{(\varkappa + 1)^2}{96} \frac{M^4}{\mu^2} \{M^2 + 4\mu\}, \\ D_3 &= \frac{c_0}{c_1} \frac{(\varkappa + 1)^2}{32} \frac{M^6}{\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (9\text{a}).$$

---

[2]) Die erste Bedingung schreibt eine um U oszillierende Verteilung von $\bar{u}(\xi, \eta)$ längs $\eta = 0$ vor: $U - \bar{u}(\xi, 0) \sim \sin \xi$. Die analoge Vorschrift $\bar{v}(\xi, 0) \sim \cos \xi$ führt nach unseren Rechnungen zu einer schlechter konvergierenden Entwicklung (7), mit der wir nach 3 Schritten (bis φ_3 einschließlich) keine Ergebnisse erzielen konnten, bei denen die örtliche Schallgeschwindigkeit in mehr als unmittelbar wandnahen Gebieten überschritten wurde.

Wie man auf Grund der Ausgangsnäherung erwarten mußte, versagt die Lösung für $\mu = 0$ $(M = 1)$. Je größer der Störungsparameter α gewählt wird, desto weiter muß μ von Null, d. h. die Machsche Zahl M der ungestörten Strömung von 1 entfernt bleiben, damit die abgebrochene Reihe eine gute Näherung darstellt.

Als numerisches Beispiel wurde folgender Fall durchgerechnet:

$$\alpha = 0{,}2, \qquad M = 0{,}9\ (\mu = 0{,}4359), \qquad \varkappa = 1{,}405 .$$

Als Wand wurde eine um $\eta = 0$ oszillierende Stromlinie angenommen. Es ist $c_1 = 0{,}9839\, c_0$ $\left(\text{somit } M_1 = \frac{U}{c_1} = 0{,}9148\right)$.

Wegen $\frac{\bar{u}}{c_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\frac{\bar{v}}{c_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ berechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten aus der oben gewonnenen Näherung für φ in der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{c_1} &= \frac{U}{c_1} + (\alpha\, u_1(\eta) + \alpha^3 u_{11}(\eta)) \sin \xi + \alpha^2 u_2(\eta) \cos 2\xi + \alpha^3 u_3(\eta) \sin 3\xi, \\ \frac{\bar{v}}{c_1} &= (\alpha\, v_1(\eta) + \alpha^3 v_{11}(\eta)) \cos \xi + \alpha^2 v_2(\eta) \sin 2\xi + \alpha^3 v_3(\eta) \cos 3\xi \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (10),$$

also in Form einer Fourier-Reihe bezüglich der Variablen ξ, wobei höhere Näherungen des Iterationsverfahrens, wie man sieht, noch entsprechend kleine Korrekturen der Koeffizienten bringen können. Um einen Überblick über die gute Konvergenz dieser Entwicklungen bei den gewählten Parameterwerten zu geben, sind in Bild 1a und 1b die Kurven für die von η abhängigen Koeffizienten der obigen abgebrochenen Fourier-Reihen dargestellt.

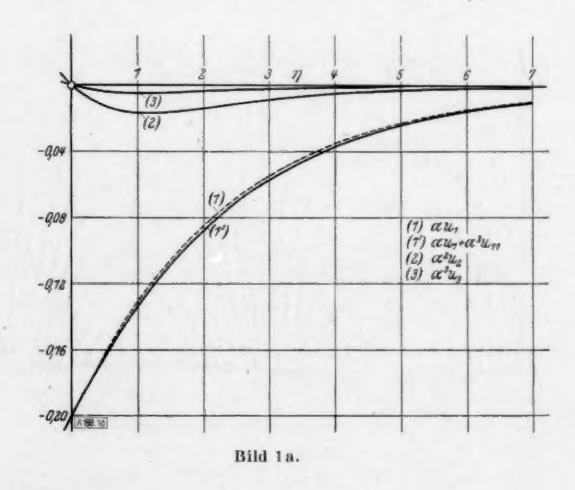


Bild 1a.

Bild 2 gibt den Verlauf der Stromlinien, Bild 3 den Verlauf der Kurven gleicher auf die Schallgeschwindigkeit c_1 bezogener Geschwindigkeitsbeträge

$$w = \frac{1}{c_1} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} = \text{const}$$

wieder. Innerhalb des von der gestrichelten Linie in Bild 2 angegebenen Bereiches herrscht Überschallgeschwindigkeit. Einige Machsche Linien sind eingezeichnet. In Bild 4 ist schließlich die Wandstromlinie stark überhöht dargestellt.

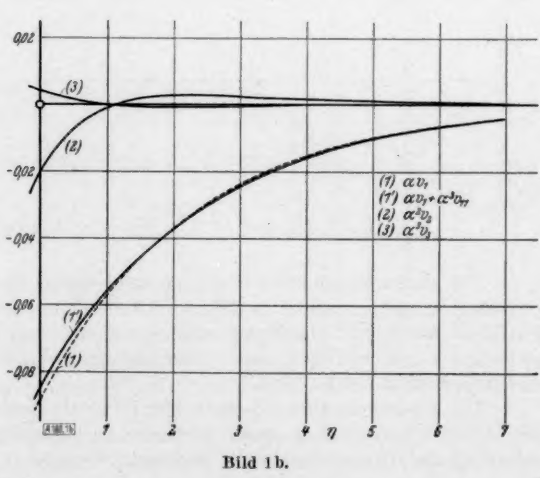


Bild 1b.

Die auftretenden symmetrischen, stark in die Strömung hineingreifenden Überschallgebiete erinnern an jene, welche für Düsenströmungen an den Wänden in der Gegend des engsten Querschnittes berechnet worden sind (G. I. Taylors „symmetrische" Lösungen [8], siehe auch

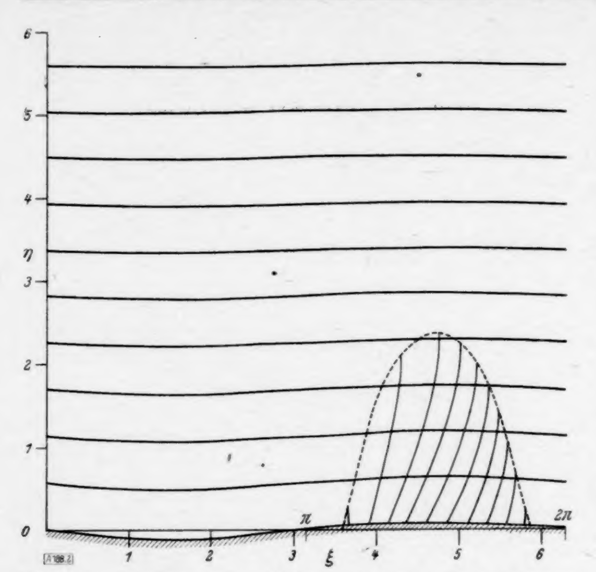


Bild 2. Stromlinienverlauf. Machsche Wellen im Überschallgebiet.

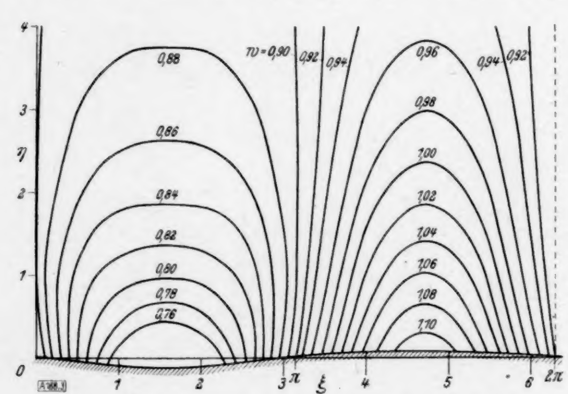


Bild 3. Kurven konstanter Geschwindigkeitsbeträge.

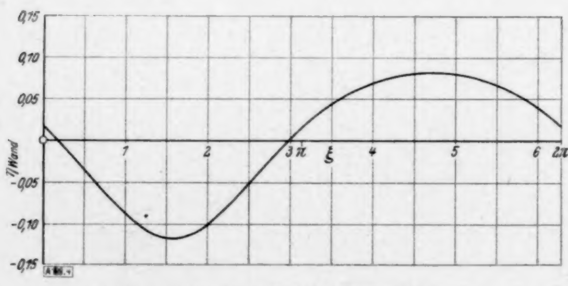


Bild 4. Wandwelle in 10facher Überhöhung.

[3]). Dort konnten jedoch die Überschallgebiete nur in grober Näherung angegeben werden.

Bei festem a und mit gegen 1 wachsenden Machschen Zahlen M läßt die Güte der Konvergenz obiger Entwicklungen schnell nach. Das steht insofern in Einklang mit den Beobachtungen, als von einer gewissen Machschen Zahl ab Verdichtungsstöße auftreten (siehe hierzu die in [6] wiedergegebenen Aufnahmen). Inwieweit sich solche Überschallgebiete ausbreiten können, bis Verdichtungsstöße auftreten, wird sehr wesentlich von der Formgebung der Wandwellen abhängen. Dafür spricht auch die sehr starke Abhängigkeit der Konvergenz unserer Entwicklungen von der Gestalt der Randbedingungen (siehe hierzu Fußnote [2])).

4. Ein weiteres Beispiel: Strömung zwischen entgegengesetzt welligen Wänden. Wenn man die in Abschnitt 3 wiedergegebenen Rechnungen entsprechend für Machsche Zahlen

$$M = \frac{U}{c_0} > 1$$

durchführen will, hat man an Stelle von (5) von der Ausgangsnäherung (Lösung der linearen Gl. (4.1))

$$\left.\begin{aligned} \Phi = U x + a_1 \cos\frac{2\pi}{l}(\bar{\mu}\, y + x) \\ (\bar{\mu} = i\,\mu = \sqrt{M^2 - 1}) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

auszugehen. Die Stromlinien stellen also nach dieser ersten Näherung Wellenlinien dar, deren Amplitude nicht mit dem Wandabstand abklingt; es handelt sich vielmehr um Wellenlinien, welche zur Wandwelle kongruent bleiben, aber gegen diese parallel versetzt sind längs Linien, die mit der ungestörten Strömungsrichtung den Machschen Winkel $\alpha = \operatorname{arc\,cotg} \bar{\mu}$ einschließen (s. [5] S. 209). Die entsprechend Abschnitt 3 durchgeführte Rechnung liefert eine Entwicklung, welche wegen der auftretenden η-Potenzen nun nur in nächster Wandnähe konvergiert.

Um daher einen in η-Richtung begrenzten Fall zu behandeln, werde eine Gasströmung zwischen entgegengesetzt welligen Wänden (unendliche Aneinanderreihung von Düsen) betrachtet. Auf Grund der Symmetrie der Anordnung kann man statt dessen auch die Strömung zwischen einer welligen und einer ebenen Wand ins Auge fassen, wie sie der Versuchsanordnung in [6] entspricht.

Die Ausgangsnäherung nach der Prandtlschen Analogie für einen solchen Fall erhalten wir durch Überlagerung von (11) und der bezüglich $y = 0$ gespiegelten Lösung. Unter Verwendung der Dimensionslosen (6) lautet dieselbe:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{U}{c_1}\xi + \alpha\,\varphi_1 \\ \text{mit}\qquad \varphi_1 &= \frac{c_0}{c_1}\cos\bar{\mu}\,\eta\cos\xi \end{aligned}\right\} \qquad (12).$$

Um eine gut konvergierende Entwicklung bei der nun vorzunehmenden Iteration zu erhalten, verlangen wir, daß die gesuchte Lösung eine Geschwindigkeitsverteilung $u(\xi, 0) \sim \sin\xi$ längs der Symmetrielinie $\eta = 0$ liefert.

Durch Iteration ergibt sich dann für die Entwicklung

$$\varphi = \frac{U}{c_1}\xi + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^\nu \varphi_\nu(\xi, \eta)$$

mit einem Schritt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \{C\,\eta\sin 2\bar{\mu}\,\eta + D(1 - \cos 2\bar{\mu}\,\eta)\}\sin 2\xi, \\ \text{wobei}\qquad C &= M^3\frac{c_0}{c_1}\frac{\varkappa+1}{16\bar{\mu}}, \\ D &= M\frac{c_0}{c_1}\frac{1}{16\bar{\mu}^2}\{4 - (3-\varkappa)M^2\} \end{aligned}\right\} \qquad (13).$$

Für den nächsten Iterationsschritt hat man die Differentialgleichung zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} &-\bar{\mu}^2\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\eta^2} \\ &= \cos\xi\,\{a_1\cos\bar{\mu}\,\eta + b_1\,\eta\sin\bar{\mu}\,\eta + c_1\cos 3\bar{\mu}\,\eta + d_1\,\eta\sin 3\bar{\mu}\,\eta\} \\ &+ \cos 3\xi\,\{a_2\cos\bar{\mu}\,\eta + b_2\,\eta\sin\bar{\mu}\,\eta + c_2\cos 3\bar{\mu}\,\eta + d_2\,\eta\sin 3\bar{\mu}\,\eta\} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

mit

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[M\{D(4\varkappa - (3\varkappa-1)M^2) - C\bar{\mu}(2\varkappa-1)\} + \frac{c_0}{c_1}\left\{\bar{\mu}^2 - \frac{3}{16}(\varkappa+1)M^4\right\}\right],$$

$$b_1 = \frac{1}{2}M^3(\varkappa+1)C,$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left[M\{C\bar{\mu}(3-2\varkappa) - D(4-(3-\varkappa)M^2)\} + \frac{c_0}{c_1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{(\varkappa+3)}{4}M^2 + \frac{3(\varkappa+1)}{16}M^4\right\}\right],$$

$$d_1 = \frac{1}{2}M\,C\{4-(3-\varkappa)M^2\},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[M\{C\bar{\mu}(2\varkappa-5) - D(\bar{\mu}^2(7-\varkappa) + 3(\varkappa+1))\} + \frac{c_0}{c_1}\frac{(\varkappa+1)}{4}M^2\left(1 - \frac{M^2}{4}\right)\right],$$

$$b_2 = -3\,d_1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left[M\{C\bar{\mu}(2\varkappa+1) - D(2-(3\varkappa+5)M^2)\} + \frac{c_0}{c_1}\frac{(\varkappa+1)}{16}M^4\right],$$

$$d_2 = -3\,b_1.$$

Die Lösung lautet

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3 = \cos\xi&\left[\left(\frac{a_1}{2\bar{\mu}} + \frac{b_1}{4\bar{\mu}^2}\right)\eta\sin\bar{\mu}\,\eta - \frac{b_1}{4\bar{\mu}}\eta^2\cos\bar{\mu}\,\eta\right. \\ &\left.+\left(\frac{c_1}{8\bar{\mu}^2} + \frac{3d_1}{32\bar{\mu}^3}\right)(\cos\bar{\mu}\,\eta - \cos 3\bar{\mu}\,\eta) - \frac{d_1}{8\bar{\mu}^2}\eta\sin 3\bar{\mu}\,\eta\right] \\ +\cos 3\xi&\left[\left(\frac{a_2}{8\bar{\mu}^2} - \frac{b_2}{32\bar{\mu}^3}\right)(\cos\bar{\mu}\,\eta - \cos 3\bar{\mu}\,\eta) + \frac{b_2}{8\bar{\mu}^2}\eta\sin\bar{\mu}\,\eta\right. \\ &\left.+\left(\frac{c_2}{6\bar{\mu}} + \frac{d_2}{36\bar{\mu}^2}\right)\eta\sin 3\bar{\mu}\,\eta - \frac{d_2}{12\bar{\mu}}\eta^2\cos 3\bar{\mu}\,\eta\right] \end{aligned}\right\} \qquad (15).$$

Von den erhaltenen Ausdrücken gelangt man zu der entsprechenden Lösung für $M < 1$ in reeller Schreibweise, wenn man überall $\bar{\mu}$ durch $i\,\mu$ ersetzt.

Die Geschwindigkeitskomponenten $\bar{u}$, $\bar{v}$ sind wieder der Gestalt nach durch die Ausdrücke (10) gegeben.

Bevor wir die erhaltene Lösung an einem numerischen Beispiel erörtern, schicken wir eine Bemerkung über die zu erwartende Größenordnung der Verbesserungen $\alpha^2\varphi_2$ und $\alpha^3\varphi_3$

im Vergleich zu $a\varphi_1$ voraus. Solange M und a so gewählt werden, daß die örtliche Schallgeschwindigkeit durchschritten wird, muß nach der einfachen Stromfadenvorstellung der Strömung an den beiden Durchschreitungsstellen eine Zusammendrängung der Stromlinien erfolgen. Das bedeutet aber, daß der Ausdruck $a^2\varphi_2$, der den Faktor $\sin 2\xi$ enthält, notwendig gegenüber dem Ausdruck $a\varphi_1$ mit dem Faktor $\cos\xi$ noch stark ins Gewicht fallen muß. Dagegen werden die weiteren Glieder der Entwicklung, beginnend mit dem von uns berechneten Term $a^3\varphi_3$ klein ausfallen.

Wir wählen als Beispiel:

$$a = 0{,}2, \quad M = 1{,}1\ (\bar{\mu} = 0{,}4583), \quad \varkappa = 1{,}405 \qquad (16).$$

Dann ist $c_1 = 1{,}018\, c_0$ und $M_1 = \frac{U}{c_1} = 1{,}081$.

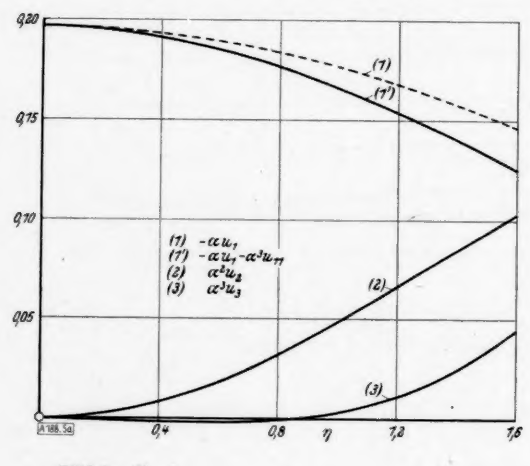


Bild 5 a (oben)

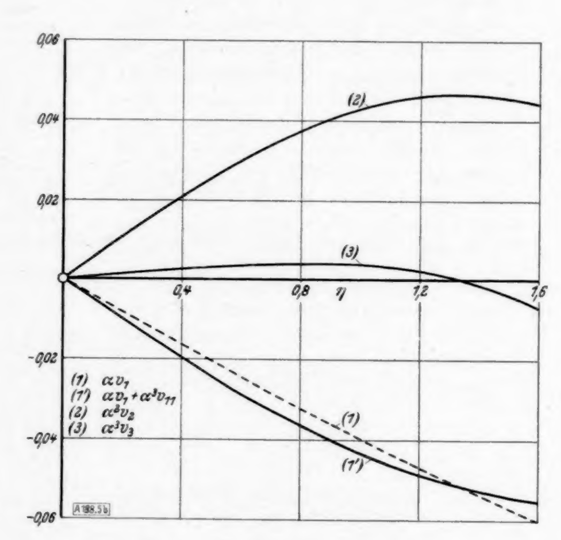


Bild 5 b (rechts)

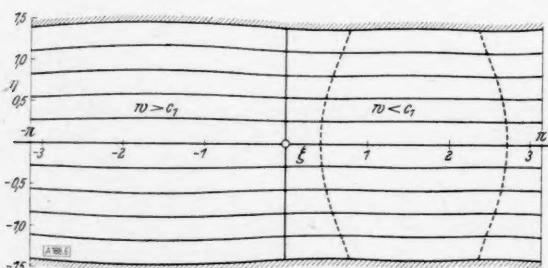


Bild 6. Stromlinienverlauf und Grenzen zwischen Unterschall- und Überschallgebieten.

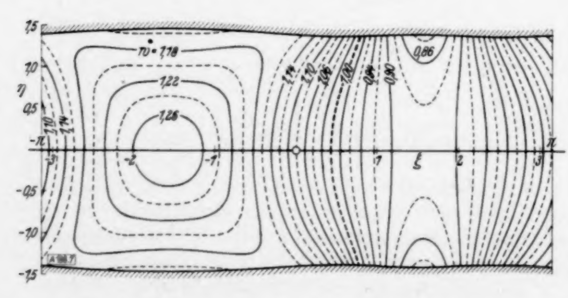


Bild 7. Kurven konstanter Geschwindigkeitsbeträge.

Entsprechend dem Bild 1 sind in Bild 5 die einzelnen Beiträge zu den Geschwindigkeitskomponenten dargestellt. Sie bestätigen unsere oben ausgesprochene Erwartung. Bild 6 gibt das Feld der Stromlinien wieder, Bild 7 die Kurven gleicher Geschwindigkeitsbeträge. Die Geschwindigkeit schwankt von $0{,}84\, c_1$ bis $1{,}28\, c_1$ um die „ungestörte" Geschwindigkeit $U = 1{,}08\, c_1$. In Bild 6 sind wieder jene Kurven hinzugefügt, welche Überschall- und Unterschallgebiete trennen[3]). Schließlich gibt Bild 8 die von uns als Wand gewählte Stromlinie stark überhöht wieder. Das Verhältnis der Querschnitte an der weitesten und engsten Stelle beträgt 1.07.

Wir haben damit eine gut konvergierende Lösung gewonnen, in der sich in einer völlig regulären Strömung periodisch Über- und Unterschallgebiete ablösen. Der einzelne Übergang entspricht jenem der Meyerschen Düsenströmung [4]. Während jedoch die bisher für die Düse angestellten Rechnungen [4], [8], [3] auf Grund der schlechten Konvergenz der

[3]) Bemerkung bei der Korrektur: Die Beschriftung von Bild 6 enthält einen Fehler. Es muß heißen: $w > 1$ bzw. $w < 1$ statt $w > c_1$ bzw. $w < c_1$.

benutzten Potenzreihenentwicklungen nach ξ und η nur Aussagen in der Nähe des engsten Düsenquerschnitts gestatteten, gilt die hier gewonnene Lösung längs der ganzen ξ-Achse in dem gewählten η-Bereich.

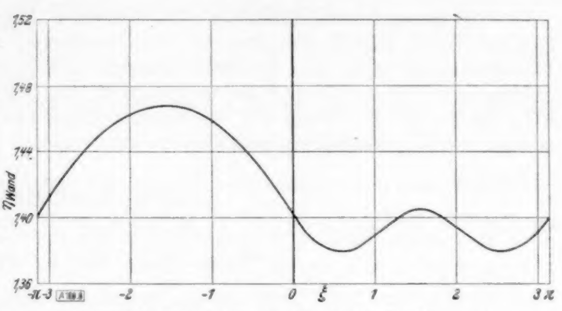


Bild 8. Wandwelle in 20 facher Überhöhung.

Es sei an dieser Stelle auf ein Theorem hingewiesen [3] S. 332/333, welches in engem Zusammenhang mit unserer Problemstellung steht und welches wir bereits früher [3] S. 335 auf den Fall der Strömung zwischen entgegengesetzt welligen Wänden angewandt haben. In einer engeren Fassung sagt dieses Theorem im zweidimensionalen Falle aus: Erreicht in einer zu einer Geraden spiegelbildlichen in einem gewissen Bereich K regulären stationären kompressiblen Potentialströmung die Geschwindigkeit auf der Symmetriegeraden in einem Punkte P des Bereichs die örtliche Schallgeschwindigkeit als Extremum, so herrscht auf der ganzen Senkrechten zur Symmetriegeraden durch P in K die örtliche Schallgeschwindigkeit. Die Stromlinien durchkreuzen diese Senkrechte orthogonal und unter verschwindender Krümmung.

Denken wir uns bei einer Strömung zwischen vorgegebenen entgegengesetzt welligen Wänden — oder zwischen einer welligen und einer ebenen Wand — die Machsche Zahl $M = \frac{U}{c_0}$ von einem kleinen Werte aus anwachsend, so werden sich, ganz wie in Bild 2, zunächst symmetrische Überschallgebiete an den Wänden in der Umgebung der engsten Querschnitte ausbilden. Es kann aber nicht der Fall schließlich eintreten, daß bei wachsendem M durch das Größerwerden dieser Überschallgebiete bis zur gegenseitigen Verschmelzung an Stellen der Mittelachse selbst die örtliche Schallgeschwindigkeit analytisch erreicht wird. Denn nach obigem Theorem müßte in jenem Stadium, in welchem die örtliche Schallgeschwindigkeit auf der Mittelachse gerade (und das heißt: als Maximum) erreicht wird, überall in den Ebenen der engsten Querschnitte Schallgeschwindigkeit herrschen und die Stromlinien müßten beim Durchschreiten derselben verschwindende Krümmung haben. Dies ist aber nicht mit der Gestalt der Wandstromlinien verträglich, solange man ihnen im engsten Querschnitt endliche Krümmung gibt. (Wenn sie dagegen hier verschwindende Krümmung haben, bilden sich die erstgenannten symmetrischen Überschallgebiete an den Wänden nicht aus — ebenfalls zufolge unseres Theorems in einer allgemeineren Fassung, s. [3].) Es muß also, bevor die örtliche Schallgeschwindigkeit auf der Mittelachse erreicht wird, der analytische Zusammenhang der Strömung verlorengehen, wobei wir an das Auftreten von Verdichtungsstößen denken. Diese Aussage gilt jedoch nur, insoweit die Strömung nicht von der Wand abreißt. Tritt jedoch Grenzschichtablösung ein, so versagen natürlich unsere potentialtheoretischen Betrachtungen.

Es sei zum Schluß noch bemerkt, daß kürzlich A. Busemann anläßlich der GAMM-Tagung am 4. Mai 1940 in Braunschweig u. a. über Rechnungen berichtet hat, die in ähnlicher Weise wie in der vorliegenden zu jenem Zeitpunkt bereits abgeschlossenen Arbeit von der nach der Prandtlschen Regel zu gewinnenden Lösung als Ausgangsnäherung für ein Iterationsverfahren ausgehen, hier jedoch aufbauend auf der Differentialgleichung für die Stromfunktion und mit der anderen Zielsetzung der Berechnung von Unterschallströmungen um vorgegebene Berandungen.

Zusammenfassung. Mit dem Ziele, Gasströmungen zu untersuchen, welche die örtliche Schallgeschwindigkeit durchschreiten, wird ein Iterationsverfahren zur genäherten Berechnung kompressibler Strömungen entwickelt. Die Ausgangsnäherung wird auf Grund jener Linearisierung, welche zur Prandtlschen Regel führt, gewonnen. Gegenüber der Ausgangsnäherung nach dem Verfahren von Rayleigh und Janzen, nämlich der inkompressiblen Potentialströmung, hat die hier verwendete Ausgangsnäherung den Vorzug, bereits für beliebige Machsche Zahlen $\neq 1$ die Kompressibilität zu berücksichtigen, setzt jedoch voraus, daß die Strömung nur gering von einer reinen Translationsbewegung abweicht. Durch Iteration wird diese Näherung nun so verbessert, daß sie auch für größere Abweichungen gilt. Das Verfahren versagt, wenn die Machsche Zahl der „ungestörten" translatorischen Grundströmung gleich Eins wird, gibt aber sonst gut konvergierende Entwicklungen — im wesentlichen Potenzentwicklungen nach einer Maßzahl für die Abweichung der Strömung von der Parallelbewegung.

Als Beispiel wird zunächst die Strömung längs einer welligen Wand berechnet. Ein Zahlenbeispiel liefert geschlossene, symmetrische, stark in die Strömung hineinreichende Überschallgebiete an den Wanderhebungen. Als weiterer Fall wird eine Strömung zwischen entgegengesetzt welligen Wänden ermittelt und durch ein numerisches Beispiel illustriert, in welchem die Strömung mit beträchtlichen periodischen Schwankungen abwechselnd Unterschall- und Überschallgeschwindigkeiten erreicht.

Schrifttumverzeichnis.

[1] J. Ackeret: Beitrag „Gasdynamik" im Hb. d. Physik, Bd. 7, Berlin 1927.

[2] A. Busemann: Beitrag „Gasdynamik" im Hb. d. Experimentalphysik, Bd. 4, 1. Teil, Leipzig 1931.

[3] H. Görtler: Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 325–337.

[4] Th. Meyer: Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. Diss. Göttingen 1907, erschienen in Mitteilungen über Forsch.-Arb. Ing.-Wes., Heft 62, Berlin 1908.

[5] L. Prandtl: Abriß der Strömungslehre, 2. Aufl., Braunschweig 1935, S. 206—210.

[6] L. Prandtl: Allgemeine Überlegungen über die Strömung zusammendrückbarer Flüssigkeiten. Vortrag, gehalten auf der „Volta-Tagung" Rom 1935, nochmals abgedruckt (ohne Nachtrag und zugehörige Aufnahmen) in Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 129—142.

[7] G. I. Taylor: Recent Work on the Flow of Compressible Fluids. J. London Mathem. Soc. Bd. 5 (1930), S. 224—240, deutsche Übersetzung in Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930), S. 334—345.

[8] G. I. Taylor: The Flow of Air at High Speeds past Curved Surfaces. Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda No. 1381, London 1930.

[9] W. Tollmien: Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallströmungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 117—136. 188

Halbebene mit Kreisbogenkerbe.

Von *C. Weber* in Dresden.

I. Einleitung. Das zweidimensionale Problem der Halbebene, die in Richtung parallel zur Begrenzungslinie gezogen wird und eine oder mehrere Kerben hat, gehört zu den einfach ausschauenden, aber bisher nicht gelösten Problemen der Elastizitätslehre. Dabei wäre es praktisch beinahe gleichgültig, ob die Kerben durch Kreisbogen oder durch Ellipsenbogen begrenzt sind, da die maximalen Spannungen im Kerbgrunde überwiegend vom Verhältnis Grundhalbmesser zur Kerbtiefe abhängt.

Ich führe im weiteren die Lösung für Kreisbogenkerben durch und nehme hierzu nacheinander mehrere konforme Abbildungen vor, wobei die erste die Inversion ist. Hierbei erhält man ein anderes elastisches Problem, dessen Behandlung einen gewissen Vorzug aufweisen wird.

Für die Halbebene mit periodischen Kerben habe ich eine Näherungslösung gefunden, die darin besteht, daß die Halbebene mit gewelltem Rande auf eine Halbebene mit geradem Rande abgebildet wird. Diese Lösung soll später veröffentlicht werden.

II. Die konformen Abbildungen. Die Halbebene, Bild 1, werde in x-Richtung gezogen. Am Rande befindet sich eine Kerbe, die durch einen Kreisbogen begrenzt ist. Das Problem verwandle ich zuerst durch die konforme Abbildung der Inversion in ein Problem des Ebenen-Ausschnittes, d. h. eines Stückes der Ebene, das durch zwei sich schneidende Geraden begrenzt ist. Ist der Winkel zwischen beiden Geraden ein rechter, so erhält man den Sonderfall der Viertelebene.

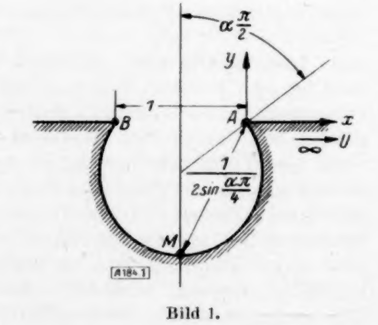


Bild 1.

Für einen belasteten Ebenen-Ausschnitt gibt es auch noch keine Methode zum Auffinden von Lösungen.

Durch eine zweite konforme Abbildung wird der Ebenen-Ausschnitt in einen Streifen verwandelt (ein durch zwei parallele Geraden begrenztes Gebiet). An Stelle der Airyschen Spannungsfunktion wähle ich hierbei eine andere geeignete Funktion.

Die Airysche Spannungsfunktion der Halbebene mit Kreisbogenkerbe

$$F = \Re\,[g_1(x+iy) + (x-iy)\,g_2(x+iy)]$$

gehe im Unendlichen gegen $F_\infty = y^2$, so daß $\sigma_{x\infty} = 2$ wird. Am Rande müssen $F = 0$ und die Ableitung senkrecht zum Rande $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ werden. Der Koordinatenanfangspunkt liegt in A, Bild 1. Durch $x' + i y' = 1/(x+iy)$ bilden wir das Gebiet konform auf den Ebenen-Ausschnitt mit dem Eckwinkel $\alpha\frac{\pi}{2}$ ab. Die Funktion $F'(x', y') = F(x, y)/(x^2 + y^2)$ ist wieder eine Airysche Spannungsfunktion. Am Rande müssen $F' = 0$ und $\frac{\partial F'}{\partial n} = 0$ werden. Die unendlich entfernten Punkte der Halbebene gehen in den Punkt U' mit $x' = 0$, $y' = 0$ über (Bild 2). In diesem Punkte erhält man eine singuläre Stelle. Die Airysche Spannungsfunktion wird dort $\frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{y'^2}{x'^2+y'^2}$. Die Zuordnung der Punkte des x-y-Gebietes und des x'-y'-Gebietes ergibt sich aus den Bildern 1 und 2.

Bild 2.

Nun verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt nach dem Eckpunkt B' durch Einführung des Koordinaten $r'' e^{i\vartheta''} = x'' + i y'' = (x'+1) + i y'$. Die Spannungsfunktion geht über in:

$$F'(x', y') = F'(x''-1, y'') = F''(x'', y'').$$

An Stelle dieser Funktion F'' untersuchen wir im weiteren die Funktion $F^* = F''/r''$. Die Singularität von F^* in der singulären Stelle bleibt dieselbe wie von F'', da dort $r'' = 1$ ist; auch die Randbedingungen bleiben erhalten.

Es ist von besonderer Wichtigkeit, daß F^* wie folgt geschrieben werden kann:

$$F^* = \sin\vartheta''\,\varphi_0'' + \sin\left(\vartheta'' + \alpha\frac{\pi}{2}\right)\varphi_1'',$$

wo φ_0'' und φ_1'' zweidimensionale Potentialfunktionen sind und die Koeffizienten von φ_0'' und φ_1'' kein r'' enthalten.

Nun bilden wir durch eine zweite konforme Abbildung den Ebenen-Ausschnitt mit dem Eckwinkel $\alpha\frac{\pi}{2}$ auf einen Streifen von der Breite $\frac{\pi}{2}$ durch Einführung der Veränderlichen λ und ϑ ab:

$$e^{\alpha(\lambda + i\vartheta)} = e^{i\alpha(\vartheta - i\lambda)} = e^{i(\vartheta'' - i\ln r'')} = x'' + i y''.$$

Dann wird

$$F^*(x'', y'') = \frac{\sin\alpha\vartheta}{\alpha}\Re f_0(\vartheta - i\lambda) + \frac{\sin\alpha\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)}{\alpha}\Re f_1(\vartheta - i\lambda).$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\varphi_0'' = \frac{1}{\alpha}\Re f_0(\vartheta - i\lambda), \qquad \varphi_1'' = \frac{1}{\alpha}\Re f_1(\vartheta - i\lambda).$$

Für $\alpha = 0$ werden die angeführten Abbildungen hinfällig; statt des Grenzüberganges sei eine unmittelbar zum Ziele führende Abbildung angegeben. Wir setzen in Bild 4 $x + iy = \frac{1}{x' + iy'}$ und erhalten damit die konforme Abbildung auf den Streifen von der Breite $\frac{\pi}{2}$. Die Airysche Spannungsfunktion wird:

$$F'(x', y') = F(x, y)/r^2 = y'\,\Re f_0(y' - i x') + \left(y' + \frac{\pi}{2}\right)\Re f_1(y' - i x').$$

Diese Gleichung stimmt mit dem Grenzfalle $\alpha \to 0$ überein. Auch die Randbedingungen und die singuläre Stelle sind dieselben.

Wir kehren wieder zum allgemeinen Falle mit $a \neq 0$ zurück. An den Rändern des Streifens ist F^* gleich null, ebenfalls $\frac{\partial F^*}{\partial n}$. Im Koordinatenanfangspunkte haben wir die Singularität

$$\frac{y''^2}{[(x''-1)^2+y''^2]\,r''} = \sin\vartheta''\,\Re\frac{i}{(x''-1)+i\,y''} = \sin\vartheta''\,\Re\frac{i}{e^{\ln r''+i\vartheta''}-1},$$

und da nur die Umgebung von $\vartheta''=0$, $r''=1$ zu beachten ist:

$$\sin\vartheta''\,\Re\frac{1}{(\vartheta''-i\ln r'')} = \frac{\sin a\,\vartheta}{a}\,\Re\frac{1}{\vartheta-i\lambda}.$$

Im weiteren benötigen wir zwecks kürzerer Schreibweise die verschobenen Koordinatensysteme nach Bild 3. Wir nennen die Koordinaten im unverschobenen Koordinatensysteme statt ϑ, λ nunmehr ϑ_0, λ, für die um $k\frac{\pi}{2}$ verschobenen Koordinatensysteme ϑ_k, λ; hierbei ist $\vartheta_k = \vartheta_0 - k\frac{\pi}{2}$ mit $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Weiter führen wir die komplexen Veränderlichen $\zeta_k = \vartheta_k - i\lambda$ ein. Die Funktion $\Re\frac{1}{\zeta_k} = \Re\frac{1}{\vartheta_k - i\lambda}$ wird häufiger vorkommen; wir schreiben hierfür φ_k.

Die Singularität im Koordinatenanfangspunkte ist in dieser Schreibweise gegeben durch $\frac{1}{a}\sin a\,\vartheta_0\cdot\varphi_0$.

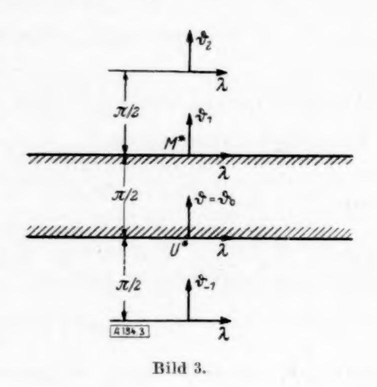


Bild 3.

III. Aufbau der Lösung. Wir setzen:

$$F^* = \frac{\sin a\,\vartheta_0}{a}\,\Psi_0 + \frac{\sin a\,\vartheta_1}{a}\,\Psi_1,$$

wo Ψ_0 und Ψ_1 zwei noch unbekannte Potentialfunktionen sind. Wir bilden beide aus Näherungsgliedern

$$\Psi_0 = \psi_{0(0)} + \psi_{0(1)} + \psi_{0(2)} + \ldots$$
$$\Psi_1 = \psi_{1(0)} + \psi_{1(1)} + \psi_{1(2)} + \ldots$$

Als nullte Näherung für Ψ_0 nehmen wir $\psi_{0(0)} = \varphi_0$, für Ψ_1 nehmen wir $\psi_{1(0)} = 0$. Dann ist die nullte Näherung:

$$F_{(0)}{}^x = \frac{1}{a}\sin a\,\vartheta_0\cdot\varphi_0.$$

Am Rande $\vartheta_0 = 0$ sind alle Randbedingungen erfüllt; am Rande $\vartheta_1 = 0$ werden weder $F_{(0)}{}^*$ noch $\frac{\partial F_{(0)}{}^*}{\partial\vartheta}$ gleich null. Wir fügen die ersten Ergänzungsglieder $\psi_{0(1)}$ und $\psi_{1(1)}$ hinzu, die wir so wählen, daß am Oberrande die beiden Randbedingungen $F^* = 0$ und $\frac{\partial F^*}{\partial\vartheta} = 0$ erfüllt werden. Dabei beachten wir, daß φ_0 eine antimetrische Funktion in ϑ_0 und $\frac{\partial\varphi_0}{\partial\vartheta}$ eine symmetrische Funktion in ϑ_0 ist.

Für $\psi_{0(1)}$ und $\psi_{1(1)}$ erhalten wir folgende Bedingungen:

$$[\sin a\,\vartheta_0\cdot(\varphi_0 + \psi_{0(1)}) + \sin a\,\vartheta_1\cdot\psi_{1(1)}]_{\vartheta_1=0} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1\text{a}),$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}[\sin a\,\vartheta_0\cdot(\varphi_0 + \psi_{0(1)}) + \sin a\,\vartheta_1\;\psi_{1(1)}]_{\vartheta_1=0} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1\text{b}).$$

Hieraus

$$\sin a\frac{\pi}{2}\,(\varphi_0 + \psi_{0(1)})_{\vartheta_1=0} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2\text{a})$$

$$a\cos a\frac{\pi}{2}\,(\varphi_0 + \psi_{0(1)})_{\vartheta_1=0} + \sin a\frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\psi_{0(1)}}{\partial\vartheta}\right) + a\,\psi_{1(1)\vartheta_1=0} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2\text{b}).$$

Aus (2a) folgt $\psi_{0(1)} = \varphi_2$, da φ_2 und φ_0 für $\vartheta_1 = 0$, also $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta_2 = -\frac{\pi}{2}$ sich aufheben.

Weiter folgt aus (2b)

$$\psi_{1(1)} = -\frac{2}{a}\sin a\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\vartheta}.$$

Jetzt fügen wir die nächsten Glieder $\psi_{0(2)}$ und $\psi_{1(2)}$ hinzu, die so gewählt werden, daß am anderen Rande, also für $\vartheta_0=0$ die Randbedingungen erfüllt werden und erhalten

$$\psi_{0(2)} = \varphi_{-2} + \left(\frac{2}{a}\sin a\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\varphi_{-2}}{\partial\vartheta^2}, \qquad \psi_{1(2)} = \frac{2}{a}\sin a\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\partial\varphi_{-2}}{\partial\vartheta}.$$

So geht es weiter; bei der nächsten Näherung kommt φ_4 und dessen Ableitungen hinzu. Das Ergebnis ist in folgender Tafel 1 zusammengestellt. Hierbei gibt die Summe der ungeraden Zeilen Ψ_0, die Summe der geraden Zeilen Ψ_1; zur Abkürzung ist $\frac{2}{a}\sin a\frac{\pi}{2}=s$ gesetzt.

Tafel 1.

φ_{-6}	φ_{-4}	φ_{-2}	φ_0	φ_2	φ_4	φ_6
$3s\frac{\partial\varphi_{-6}}{\partial\vartheta}$	$2s\frac{\partial\varphi_{-4}}{\partial\vartheta}$	$s\frac{\partial\varphi_{-2}}{\partial\vartheta}$	0	$-s\frac{\partial\varphi_2}{\partial\vartheta}$	$-2s\frac{\partial\varphi_4}{\partial\vartheta}$	$-3s\frac{\partial\varphi_6}{\partial\vartheta}$
$6s^2\frac{\partial^2\varphi_{-6}}{\partial\vartheta^2}$	$3s^2\frac{\partial^2\varphi_{-4}}{\partial\vartheta^2}$	$s^2\frac{\partial^2\varphi_{-2}}{\partial\vartheta^2}$	0	0	$s^2\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial\vartheta^2}$	$3s^2\frac{\partial^2\varphi_6}{\partial\vartheta^2}$
$4s^3\frac{\partial^3\varphi_{-6}}{\partial\vartheta^3}$	$s^3\frac{\partial^3\varphi_{-4}}{\partial\vartheta^3}$	0	0	0	$-s^3\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial\vartheta_3}$	$-4s^3\frac{\partial^3\varphi_6}{\partial\vartheta^3}$

Die Zahlenkoeffizienten in der n-ten Zeile sind rechts von den Nullen:

$$1,\quad \frac{n}{1},\quad \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},\quad \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

oder

$$\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!},\quad \frac{n!}{(n-1)!\,1!},\quad \frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!},\quad \frac{(n+2)!}{(n-1)!\,3!}.$$

Die bei jeder Näherung hinzukommenden Glieder sind durch die senkrechten Säulen gegeben. Für die nullte Näherung ist φ_0 zu nehmen, für die erste Näherung kommt φ_2 und die Ableitung davon hinzu, für die zweite Näherung φ_{-2}, dann φ_4, φ_{-4} und gleichzeitig die darunter stehenden Ableitungen und so fort. Die in jeder horizontalen Zeile auftretenden Glieder lassen sich zusammenfassen. Die erste Zeile gibt

$$\Phi = \Re F_0(\zeta) = \Re\operatorname{cotg}(\vartheta_{2k} - i\lambda) = \Re\operatorname{tg}(\vartheta_{2k+1} - i\lambda).$$

Für die nächste Zeile können wir schreiben $-\frac{1}{1!}\frac{s}{\pi}\Re\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\zeta_0\Phi)$, da dieser Ausdruck sich wie folgt umformen läßt:

$$-\frac{1}{1!}\frac{s}{\pi}\Re\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\zeta_0 F_0(\zeta)) = -\frac{1}{1!}\frac{s}{\pi}\Re\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\zeta_0\sum\frac{1}{\zeta_{2m}}\right) = -\frac{1}{1!}\frac{s}{\pi}\Re\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sum(\zeta_{2m}+m\pi)\frac{1}{\zeta_{2m}}$$

$$= -\frac{1}{1!}\frac{s}{\pi}\Re\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sum\frac{m\pi}{\zeta_{2m}} = -\frac{1}{1!}\sum m s\frac{\partial\varphi_{2m}}{\partial\vartheta}.$$

Die Zusammenfassung der nächsten Zeilen gibt:

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^2\Re\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}(\zeta_0\zeta_2 F_0(\zeta)), \qquad -\frac{1}{3!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^3\Re\frac{\partial^3}{\partial\vartheta^3}(\zeta_0\zeta_2\zeta_{-2}F_0(\zeta)).$$

Der Beweis ist derselbe wie bei der vorherigen Zusammenfassung.

Nun können wir als Näherungen gleich die zusammengefaßten Zeilen verwenden, d. h. als nullte Näherung

$$F_{(0)}{}^* = \frac{1}{a}\sin a\,\vartheta_0\,\Re F_0(\zeta),$$

als zweite Näherung

$$F_{(1)}{}^* = \frac{1}{a}\sin a\,\vartheta_0\,\Re F_0(\zeta) - \frac{1}{a}\sin a\,\vartheta_1\cdot\frac{1}{1!}\frac{s}{\pi}\Re\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\zeta_0 F_0(\zeta)).$$

Für die $2n$-te Näherung erhält man:

$$\left.\begin{aligned} F^*_{(2n)} &= \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\,\vartheta_0 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{(2m)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m} \Re\,\frac{\partial^{2m}}{\partial\vartheta^{2m}}(\zeta_0\,\zeta_2\,\zeta_{-2}\cdots\zeta_{-(2m-2)}\,\zeta_{2m}\,F_0(\zeta)) \\ &-\frac{1}{\alpha}\sin\alpha\,\vartheta_1 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{(2m-1)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m-1} \Re\,\frac{\partial^{2m-1}}{\partial\vartheta^{2m-1}}(\zeta_0\,\zeta_2\,\zeta_{-2}\cdots\zeta_{(2m-2)}\,\zeta_{-(2m-2)}\,F_0(\zeta)) \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Für die $(2n+1)$-te Näherung erhält man:

$$\left.\begin{aligned} F^*_{(2n+1)} &= \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\,\vartheta_0 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{(2m)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m} \Re\,\frac{\partial^{2m}}{\partial\vartheta^{2m}}(\zeta_0\,\zeta_2\,\zeta_{-2}\cdots\zeta_{-(2m-2)}\,\zeta_{2m}\,F_0(\zeta)) \\ &-\frac{1}{\alpha}\sin\alpha\,\vartheta_1 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m+1} \Re\,\frac{\partial^{2m+1}}{\partial\vartheta^{2m+1}}(\zeta_0\,\zeta_2\,\zeta_{-2}\cdots\zeta_{2m}\,\zeta_{-2m}\,F_0(\zeta)) \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Bei jeder Näherung tritt jeweils ein Summenglied hinzu.

Für $\vartheta_0 = 0$ und $\vartheta_1 = 0$ wird am Rande bei jeder Näherung $F^* = 0$ (bis auf die singuläre Stelle), da entweder $\sin\alpha\,\vartheta$ oder der Faktor dahinter gleich null wird.

Die Ableitung $\frac{\partial F^*}{\partial\vartheta}$ der $2n$-ten Näherung wird für $\vartheta_0 = 0$ gleich null, ebenso $\frac{\partial F^*}{\partial\vartheta}$ der $(2n+1)$-ten Näherung für $\vartheta_1 = 0$. Die Berechnung folgt, wobei Glieder, die unmittelbar null werden, fortgelassen sind:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 = 0;\quad \frac{\partial F^*_{(2n)}}{\partial\vartheta} &= \sum_{m=1}^{m=n}\Bigg\{\frac{1}{(2m)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m} \Re\,\frac{\partial^{2m}}{\partial\vartheta^{2m}}(\zeta_0\cdots\zeta_{-(2m-2)}\,\zeta_{2m}\,F_0(\zeta)) \\ &+\frac{1}{\alpha}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{(2m-1)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m-1} \Re\,\frac{\partial^{2m}}{\partial\vartheta^{2m}}(\zeta_0\cdots\zeta_{-(2m-2)}\,F_0(\zeta))\Bigg\} \\ &= \sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{(2m)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m} \Re\,\frac{\partial^{2m}}{\partial\vartheta^{2m}}[\zeta_0\cdots\zeta_{-(2m-2)}(\zeta_{2m}+m\,\pi)\,F_0(\zeta)]. \end{aligned}$$

Die Klammer vor $F_0(\zeta)$ gibt aber ζ_0; $F_0(\zeta)$ wird mit einer geraden Funktion in ζ_0 multipliziert, so daß alle Glieder der Summe gleich null werden.

In gleicher Weise erfolgt der Beweis, daß für $\vartheta_1 = 0$ $\frac{\partial F^*_{(2n+1)}}{\partial\vartheta}$ gleich null wird.

Auf der entgegengesetzten Seite des Streifens bleibt für die Ableitung nach ϑ jeweils das zuletzt hinzugefügte Glied der Summe nach, da die anderen sich, wie eben bewiesen, wegheben.

Also wird für $\vartheta_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*_{(2n)}}{\partial\vartheta} &= \frac{1}{\alpha}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2n} \Re\,\frac{\partial^{2n+1}}{\partial\vartheta^{2n+1}}(\zeta_0\cdots\zeta_{2n}\,F_0(\zeta)) \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)!}\,\frac{s^{2n+1}}{\pi^{2n}}\,\Re\,\frac{\partial^{2n+1}}{\partial\zeta_1^{\,2n+1}}\left[\left(\zeta_1^{\,2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\left(\zeta_1^{\,2}-3^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\zeta_1^{\,2}-(2n-1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\operatorname{tg}\zeta_1\right] \end{aligned}$$

und für $\vartheta_0 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*_{(2n+1)}}{\partial\vartheta} &= \frac{1}{\alpha}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2n+1} \Re\,\frac{\partial^{2n+2}}{\partial\vartheta^{2n+2}}(\zeta_0\cdots\zeta_{2n}\,\zeta_{-2n}\,F_0(\zeta)) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n+1)!}\,\frac{s^{2n+2}}{\pi^{2n+1}}\,\Re\,\frac{\partial^{2n+2}}{\partial\zeta_0^{\,2n+2}}[\zeta_0(\zeta_0^{\,2}-\pi^2)\cdots(\zeta_0^{\,2}-n^2\pi^2)\operatorname{ctg}\zeta_0]. \end{aligned}$$

Zur späteren Berechnung der Spannung im Punkte M des Bildes 1 bzw. im Punkte M' des Bildes 2 benötigen wir $\frac{\partial^2 F^*}{\partial\vartheta^2}$ für den Punkt $\vartheta_1 = 0$, $\lambda = 0$. Schließen wir mit der $(2n+1)$-ten Näherung ab, so erhalten wir aus (4) unter Fortlassung der Glieder, die null werden:

$$\left[\frac{\partial^2 E^*_{(2n+1)}}{\partial \vartheta^2}\right]_{\vartheta_1=0,\,\lambda=0} = \left[2\cos\alpha\,\vartheta_0 \sum_{m=0}^{m=n} \frac{1}{(2m)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m} \Re \frac{\partial^{2m+1}}{\partial \vartheta^{2m+1}}(\zeta_0\cdots\zeta_{2m}F_0(\zeta))\right.$$

$$\left. -2\cos\alpha\,\vartheta_1 \sum_{m=0}^{m=n} \frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m+1} \Re \frac{\partial^{2m+2}}{\partial \vartheta^{2m+2}}(\zeta_0\cdots\zeta_{-2m}F_0(\zeta))\right]_{\vartheta_1=0,\,\lambda=0}$$

$$= -2\left\{\cos\alpha\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{m=n}\frac{1}{(2m)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m}\frac{\partial^{2m+1}}{\partial\vartheta_1^{2m+2}}\left(\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)\cdot\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2\right)\operatorname{tg}\vartheta_1\right.\right.$$

$$\left.\left. -\sum_{m=0}^{m=n}\frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m+1}\frac{\partial^{2m+2}}{\partial\vartheta_1^{2m+2}}\left(\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2\right)\left[\vartheta_1+\frac{2m+1}{2}\pi\right]\operatorname{tg}\vartheta_1\right)\right\}_{\vartheta_1=0}.$$

In der eckigen Klammer können wir $\frac{2m+1}{2}\pi$ fortlassen, da die daraus entstehenden Glieder ϑ_1 in ungerader Potenz enthalten. Den zu differentierenden Ausdruck fassen wir weiter als Produkt auf von ϑ_1 und $\left(\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cdots\operatorname{tg}\vartheta_1\right)$ und differentieren nach Faktoren. Dann erhält man:

$$\left[\frac{\partial^2 F^*_{(2n+1)}}{\partial\vartheta^2}\right]_{\vartheta_1=0,\,\lambda=0} = 2\sum_{m=0}^{m=n}\left\{\left((2m+2)-(2m+1)\cos\alpha\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{s}\right)\frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{2m+1}\cdot \frac{\partial^{2m+1}}{\partial\vartheta^{2m+1}}\left(\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2\right)\operatorname{tg}\vartheta_1\right)\right\} \quad . . (5).$$

IV. Bedeutung der Singularitäten und der Näherungen. Für die tangentiale Kraft von der Größe π nach Bild 5 erhält man den Spannungszustand

$$\sigma_x = -2\frac{x^3}{r^4},\quad \sigma_y = -2\frac{xy^2}{r^4},\quad \tau_{xy} = -2\frac{x^2y}{r^4}.$$

Lassen wir zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte π/ε im Abstande ε nach Bild 6 wirken, so erhalten wir den Spannungszustand durch Differentiation nach x, also

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{x^3}{r^4}\right) = \frac{2x^4-6x^2y^2}{r^6}\ \text{usw.}$$

Dieser Spannungszustand stimmt überein mit dem Spannungszustande der Singularität im Punkte U' des Ebenen-Ausschnittes:

$$\sigma_{x'} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left(\frac{y'^2}{x'^2+y'^2}\right) = \frac{2x'^4-6x'^2y'^2}{r'^6}\ \text{usw.}$$

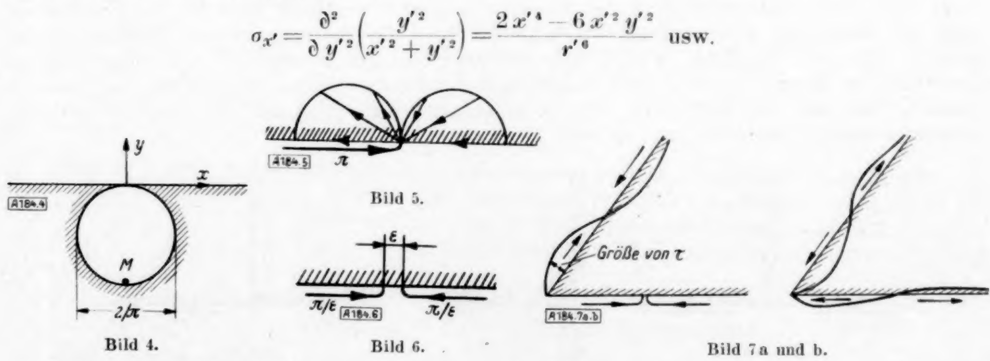


Bild 4. Bild 5. Bild 6. Bild 7a und b.

Nach der nullten Näherung erhalten wir einen Ebenen-Ausschnitt mit dieser singulären Belastung im Punkte U' und einer tangentialen Randbelastung der Kante $\vartheta'' = \alpha\frac{\pi}{2}$, die im Punkte $r'' = 1$ das Vorzeichen wechselt, Bild 7a. Bei der nächsten Näherung wird ein Spannungszustand hinzugefügt, der diese Randbelastung beseitigt. Dafür tritt jedoch am Rande $\vartheta'' = 0$ eine tangentiale Randbelastung auf, Bild 7b. Die Randbelastungen werden mit jeder Näherung immer geringer und verschieben sich immer mehr vom Punkte $r'' = 1$.

Die gesamte von der Ecke nach außen wirkende Tangentialkraft von $r''=0$ bis $r''=1$ wird nach der $(2n+1)$-ten Näherung an der Kante $\vartheta''=0$

$$T_{(2n+1)}=\int_0^1(-\tau_{xy})\,dx'=\int_0^1\frac{\partial^2 F'}{\partial x'\,\partial y'}\,dx'=\left(\frac{\partial F'}{\partial y'}\right)_{x'=1}$$

$$=\left(\frac{\partial F''}{\partial \vartheta''}\right)_{r''=1,\ \vartheta''=0}=\left[\frac{\partial (F''/r'')}{\partial \vartheta''}\right]_{r''=1,\ \vartheta''=0}=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial F^*_{(2n+1)}}{\partial \vartheta}\right)_{\lambda=0,\ \vartheta=0}$$

$$=\frac{1}{a}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n+1)!}\,\frac{s^{2n+2}}{\pi^{2n+1}}\,\frac{\partial^{2n+2}}{\partial \vartheta_0^{2n+2}}\left(\vartheta_0(\vartheta_0^2-\pi^2)\cdots(\vartheta_0^2-n^2\pi^2)\operatorname{ctg}\vartheta_0\right).$$

Ebenso nach der $2n$-ten Näherung an der Kante $\vartheta''=a\frac{\pi}{2}$:

$$T_{(2n)}=-\left(\frac{\partial F''}{\partial \vartheta''}\right)_{r''=1,\ \vartheta''=a\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n)!}\,\frac{s^{2n+1}}{\pi^{2n}}\,\frac{\partial^{2n+1}}{\partial \vartheta_1^{2n+1}}\left(\left(\vartheta_1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\vartheta_1-(2n-1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\operatorname{tg}\vartheta_1\right).$$

Die Auswertung gibt:

$$T_{(0)}=\frac{s}{2a}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\operatorname{tg}\vartheta_1=\frac{s}{2a}$$

$$T_{(1)}=\frac{s}{2a}\left(\frac{s}{\pi}\right)\frac{1}{1!}\,\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_0^2}\,\vartheta_0\operatorname{ctg}\vartheta_0=-\frac{s}{2a}\cdot\frac{s}{\pi}\cdot 2\cdot 0{,}333$$

$$T_{(2)}=\frac{s}{2a}\left(\frac{s}{\pi}\right)^2\frac{1}{2!}\,\frac{\partial^3}{\partial \vartheta_1^3}\left(\vartheta_1^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\operatorname{tg}\vartheta_1=\frac{s}{2a}\left(\frac{s}{\pi}\right)^2\cdot 3\cdot 0{,}178$$

$$T_{(3)}=-\frac{s}{2a}\left(\frac{s}{\pi}\right)^3\cdot 4\cdot 0{,}114$$

$$T_{(4)}=\frac{s}{2a}\left(\frac{s}{\pi}\right)^4\cdot 5\cdot 0{,}081$$

$$T_{(5)}=-\frac{s}{2a}\left(\frac{s}{\pi}\right)^5\cdot 6\cdot 0{,}061\,.$$

Für $a=1$, also für die Viertelebene, erhält man: $T_{(0)}=1$, $T_{(1)}=-0{,}425$, $T_{(2)}=0{,}220$, $T_{(3)}=-0{,}119$, $T_{(4)}=0{,}065$, $T_{(5)}=-0{,}037$. Das Verhältnis der aufeinander folgenden Zahlenwerte bei der Viertelebene nähert sich allmählich dem Werte $\frac{\pi}{2}$, wie folgende Überlegung zeigt. Die erste Näherung stellt den Spannungszustand dar nach Bild 8a, wo die Viertelebene zur Halbebene $y>0$ ergänzt wird; hierbei wird der hinzugekommene Rand $y''=0$ so belastet, daß auf der Linie $x''=0$ nur Schubspannungen entstehen. Um diese Schubspannungen zu beseitigen wird nach Bild 8b ein Spannungszustand hinzugefügt, der dadurch entsteht, daß man die Halbebene $x''>0$ so belastet, daß jetzt auf der Linie $y''=0$ nur Schubspannungen entstehen; und so fort.

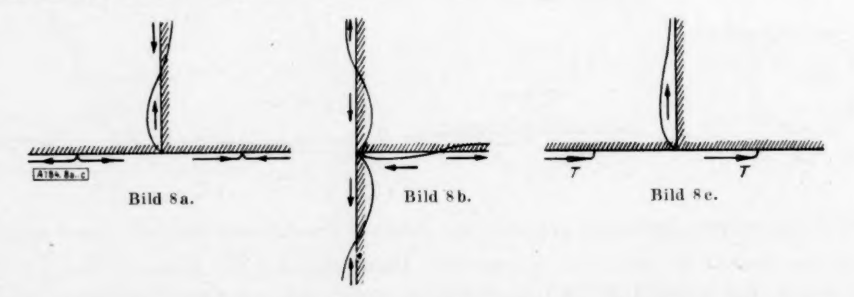


Bild 8a. Bild 8b. Bild 8c.

Vollführt man einen solchen Prozeß, wobei auf jeder Viertelebene nach Bild 8c nur eine tangentiale Einzelkraft wirkt, so erhält man auf dem anderen Rande der Viertelebene Schubspannungen nur nach einer Seite, deren Gesamtheit eine Tangentialkraft gibt, die das

$\frac{2}{\pi}$-fache der belastenden Einzelkraft ist. Dasselbe Verhältnis erhält man auch, wenn auf dem ersten Rande eine verteilte Tangentialkraft wirkt, wobei die Schubspannungen gleichgerichtet sein müssen. Sind die Schubspannungen auf dem ersten Rande zum Teil nach außen, zum Teil nach innen gerichtet, so heben sich auf dem anderen Rande die Schubspannungen teilweise auf, so daß das Verhältnis kleiner als $\frac{2}{\pi}$ wird; hierbei ist auf jedem Rande die Summe aller Absolutwerte der Kräfte zu nehmen. Teilt man die erzeugende Kraft durch die erzeugte, so erhält man einen Wert, der größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Dieser Fall liegt bei der Untersuchung nach Bild 8a und b vor. Da der Hauptanteil der Kräfte bei jedem Schritte sich immer mehr nach der Ecke, bzw. ins Unendliche verschiebt, so nähert sich das Verhältnis der Kräfte immer mehr dem Werte $\frac{\pi}{2}$.

V. Spannung im Punkte M, Bild 1. Im Punkte M', Bild 2, tritt nur die Spannung $\sigma_{r''}$ auf; diese ist

$$\sigma_{r''} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r''^2} + \frac{1}{r''}\frac{\partial}{\partial r''} + \frac{1}{r''^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta''^2}\right)(F^* r'').$$

Die beiden ersten Glieder des Differentiationsoperators werden gleich null; $\sigma_{r''}$ vereinfacht sich zu $\frac{\partial^2 F^*}{\partial \vartheta''^2} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\partial^2 F^*}{\partial \vartheta^2}$. Diesen Ausdruck haben wir, siehe Gl. (5), berechnet und zwar nach einer ungeraden Näherung, so daß dann der Rand, auf dem M' liegt, ohne Schubbelastung ist. Auf dem anderen Rande $\vartheta = 0$ hingegen tritt eine Schubspannung auf, die von $x'' = 0$ bis $x'' = 1$ die tangentiale Kraft $T_{(2n+1)}$, von $x'' = 1$ bis $x'' = \infty$ die Kraft $-T_{(2n+1)}$ gibt.

Die Spannung $\sigma_{r''}$ ist numerisch leicht zu berechnen; die Näherungswerte hierfür seien $\sigma_{(1)}, \sigma_{(3)}, \sigma_{(5)}$ usw. Man erhält

$$\sigma_{(1)} = \frac{1}{\alpha^2}\left(2 - \frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{\cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\sin\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\frac{2\sin\alpha\frac{\pi}{2}}{\pi\alpha}\cdot 2$$

$$\sigma_{(3)} = \sigma_{(1)} + \frac{1}{\alpha^2}\left(4 - 3\,\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\sin\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{2\sin\alpha\frac{\pi}{2}}{\pi\alpha}\right)^3\cdot 0{,}356$$

$$\sigma_{(5)} = \sigma_{(3)} + \frac{1}{\alpha^2}\left(6 - 5\,\frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{\cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\sin\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{2\sin\alpha\frac{\pi}{2}}{\pi\alpha}\right)^5\cdot 0{,}162$$

und so fort.

Nun soll noch eine Verbesserung vorgenommen werden, welche die Schubkräfte am Rande $\vartheta'' = 0$ berücksichtigt. Wir bringen hierzu an der Ecke des Ebenen-Ausschnittes die Kraft $-T_{(2n+1)}$ an, so daß wir eine Belastung nach Bild 9 hinzufügen. Der Spannungszustand für eine solche Scheibenbelastung ist bekannt. Auf der Linie $\vartheta'' = \alpha\frac{\pi}{2}$ erhält man in der Entfernung $r'' = 1$ die radiale Normalspannung

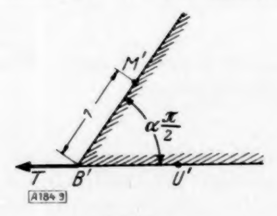


Bild 9.

$$-2T\,\frac{\sin\alpha\frac{\pi}{2} - \alpha\frac{\pi}{2}\cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin^2\alpha\frac{\pi}{2}}.$$

Ist $\sigma_{r''}$ für Punkt M' gefunden, so wird für M, Bild 1: $\sigma_{x,M} = \left(2\sin\alpha\frac{\pi}{2}\right)^2\sigma_{r''}$, wobei $\sigma_{x,\infty} = 2$ war. Für $\alpha = 1$, also für die Viertelebene, wird die Verbesserung gleich $-1{,}37\,T$.

Wir erhalten im Punkte M' eine gesamte Spannung, die für $a = 1$ und für verschiedene Näherungen weiter berechnet sind. Die Spannungen ohne $-1{,}37\,T$ sind kleiner, mit $-1{,}37\,T$ größer als die wirklichen; bei den höheren Näherungen nimmt der Fehler schnell ab, besonders mit der Verbesserung:

$$\sigma_{(1)} - 1{,}37\,T_{(1)} = 2{,}546 + 0{,}582 = 3{,}128$$

$$\sigma_{(3)} - 1{,}37\,T_{(3)} = 2{,}915 + 0{,}162 = 3{,}077$$

$$\sigma_{(5)} - 1{,}37\,T_{(5)} = 3{,}018 + 0{,}052 = 3{,}070.$$

Im Punkte M im Grunde der Halbkreiskerbe wird mit der letzten Näherung $\sigma_{x,M} = 6{,}14$ bei $\sigma_{x,\infty} = 2$. Die Spannungserhöhung ist eine 3,07-fache. Zum Vergleich: Bei der Vollebene mit Kreisloch ist die Spannungserhöhung eine 3-fache.

Für $a = 0$, $s = \pi$, Vollkreiskerbe nach Bild 4, erhält man:

$$T_{(1)} = -\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot 0{,}333; \qquad T_{(3)} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\,4\,.\,0{,}114; \qquad T_{(5)} = -\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}\cdot 6\cdot 0{,}061\,.$$

Die Spannung durch $-T_{(2n+1)}$ wird durch Grenzübergang $-\dfrac{4}{\pi}\dfrac{T_{(2n+1)}}{a}$.

Für die Spannung in M' erhalten wir für die einzelnen Näherungen:

$$a^2\left(\sigma_{(1)} - \frac{4}{\pi}\frac{T_{(1)}}{a}\right) = 2{,}000 + 1{,}333 = 3{,}333$$

$$a^2\left(\sigma_{(3)} - \frac{4}{\pi}\frac{T_{(3)}}{a}\right) = 2{,}356 + 0{,}912 = 3{,}268$$

$$a^2\left(\sigma_{(5)} - \frac{4}{\pi}\frac{T_{(5)}}{a}\right) = 2{,}518 + 0{,}732 = 3{,}250.$$

Mit dem letzten Näherungswert wird $a^2\,\sigma_{M'} = 3{,}25$ und $\sigma_{x,M} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\cdot 3{,}25 = 8{,}0$ gegen $\sigma_{x,\infty} = 2$. Statt des Grenzüberganges $a \to 0$ kann man diesen Fall auch unmittelbar lösen. Die Zahlenrechnung bleibt genau dieselbe. Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der Spannungserhöhung der Vollebene mit elliptischem Loch. Hierbei soll der Krümmungshalbmesser am Ende der langen Achse gleich der Hälfte der langen Halbachse a sein und die Ebene in Richtung der kurzen Achse gezogen werden, Bild 10. Das Achsverhältnis ist dann gleich $\sqrt{2}$ und die größte Spannung im Punkte M wird, wenn $\sigma_{x,\infty} = 2$ ist:

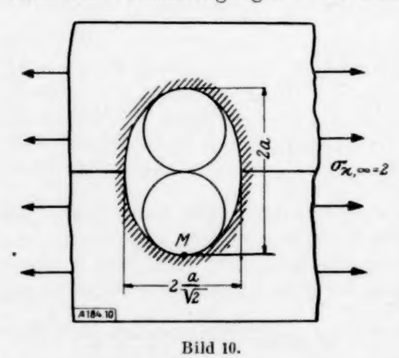


Bild 10.

$$\sigma_M = \sigma_\infty\left(1 + 2\,\frac{a}{b}\right) = 2\,(1 + 2\sqrt{2}) = 2\cdot 3{,}8.$$

Die Spannungserhöhung wird eine 3,8-fache; dies ist ein recht brauchbarer Näherungswert.

VI. Schlußbemerkungen. Wichtig erscheinen mir nicht die zahlenmäßigen Ergebnisse, sondern die durch diese Untersuchung erschlossene Möglichkeit, weitere Scheibenprobleme zu behandeln. Selbstverständlich kann man die ϑ, λ als angewandte Koordinaten im ursprünglichen Gebiete einführen. Die Anschaulichkeit wird hierdurch verringert und die Entstehung des Lösungsansatzes unverständlich. Auch die Inversion erweist sich von Vorteil, da hierdurch die Verbesserung der Näherungslösungen durch die Kräfte $-T_{(2n+1)}$ möglich geworden ist.

The Stress Distribution in a Semi-infinite Domain Having a Plane Boundary and Compressed by a Rigid Body.

By *Hajimu Ôkubo* in Yonezawa (Japan).

Zusammenfassung. Es wird das zweidimensionale Problem des elastischen Körpers behandelt, auf den ein starrer Körper beliebiger Form einen Druck ausübt. Ist ersterer groß gegen den starren Körper, kann man dessen Begrenzung angenähert durch eine Ebene ersetzen. An der Berührungsfläche werden nicht wie sonst üblich die Drücke, sondern die Verschiebungen vorgeschrieben, wie sie der Oberflächenform des starren Körpers entsprechen. Dabei wird zur Vereinfachung der Rechnung angenommen, daß in der Berührungsfläche kein Gleiten eintreten kann. Die dadurch entstehenden Scherspannungen sind, wie die Rechnung ergibt, klein gegen die Normalspannungen. — Zahlenmäßig wird der Fall durchgerechnet, daß auf einen Körper aus Gußeisen von einem starren Körper mit ebener, 2 mm breiter Fläche ein Druck ausgeübt wird.

§ 1. Introduction. We will treat in this paper, the two-dimensional problem of the equilibrium of an elastic solid body compressed by a rigid body of any shape. Such a problem has hitherto been treated by using potential theory, under the assumption that the shear vanishes on the contact surface. And the normal tension on the contact surface is determined by giving the normal displacement of the contact surface without any consideration of the tangential displacement. But since the shape of the contact surface after deformation is not determined by the normal displacement exclusively, we will treat the problem in another way.

If the linear dimensions of the elastic body are large compared with those of a rigid body, we can assume it to be bounded by a plane. In the case where the boundary is the axis of x, and the axis y penetrates into the body, in the ordinary way the normal stress Y_y at the contact surface is assumed and the problem is solved under the corresponding boundary conditions. But such an assumption does not generally have a theoretical basis, and the results are not capable of exact solution.

So we will not assume the stress distribution at the contact surface but will give the displacements which are determined by the magnitude of the force operated and by the shape of the rigid body.

To simplify the calculation it may be assumed that between the contact parts of two bodies, a slip does not occur and therefore the displacement of the x direction vanishes at the part. As will be seen in the later example, at the contact surface the shearing stress is small compared with the normal stress, so the above assumption will hold generally in practice.

§ 2. Equations of displacements and stress components. When the elastic body is compressed by a rigid body with a vertical force P and the two bodies are in contact in the interval $-c \leqq x \leqq c$, as is shown in Fig. 1, the boundary conditions are given by displacements at $-c \leqq x \leqq c$ and by surface tractions at $x > c$ and $x < -c$.

For the calculation, it is not convenient to use the cartesian coordinates under such boundary conditions, so we will take the curvilinear coordinates defined by

$$z = c \operatorname{Cos} w, \quad \text{where } z = x + iy \text{ and } w = \alpha + i\beta$$

Fig. 1.

or

$$\left.\begin{aligned} x &= c \operatorname{Cos} \alpha \cos \beta \\ y &= c \operatorname{Sin} \alpha \sin \beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

where

$$\operatorname{Cos} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{Sin} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

If we denote by u and v the displacements in x and y directions respectively, then u, v can be expressed in the forms[1])

[1]) H. Love: The Mathematical Theory of Elasticity, 4th. edition, p. 205.

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\xi}{2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, y \frac{\partial \xi}{\partial y} + u', \\ v &= \frac{\eta}{2(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (2),$$

where $\xi + i\eta$ and $v' + i u'$ are two functions of z.

By a slight calculation, we have

$$v + i u = (\lambda + 3\mu)\, \mathfrak{J}[\varphi_1(z)] - (\lambda+\mu)\, y\, \varphi_1'(z) + \varphi_2(z) \quad \ldots \ldots (3),$$

where φ_1 and φ_2 are two arbitrary functions of z and $\mathfrak{J}$ denotes the imaginary part of a complex function divided by i.

If u_β and u_α are the tangential and the normal displacements with respect to the curve $\alpha = \text{constant}$, then we have

$$u_\beta + i u_\alpha = h \frac{\partial z}{\partial \alpha}(v + i u) \quad \ldots \ldots \ldots (4),$$

where

$$\frac{1}{h} = \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2\right\}^{1/2} = c\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \alpha + \sin^2 \beta}.$$

Since φ_1 and φ_2 are functions of z, they are also function of w and if we denote them by f_1 and f_2 respectively, from equations (3) and (4) we have

$$u_\beta + i u_\alpha = \frac{\operatorname{Sin} w}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \left\{(\lambda+3\mu)\, \mathfrak{J}[f_1(w)] - \frac{(\lambda+\mu)\, y}{c \operatorname{Sin} w} f_1'(w) + f_2(w)\right\} \quad \ldots (5).$$

Now the strain components are[2])

$$e_{\alpha\alpha} = h \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h^2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h}\right), \quad e_{\beta\beta} = h \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + h^2 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h}\right), \quad e_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(h u_\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta}(h u_\alpha) \quad . \ (6),$$

or

$$\left.\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= c^2 h^3 \left\{(\operatorname{Sin}^2 \alpha + \sin^2 \beta) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \sin\beta \cos\beta\, u_\beta\right\}, \\ e_{\beta\beta} &= c^2 h^3 \left\{(\operatorname{Sin}^2 \alpha + \sin^2 \beta) \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, u_\alpha\right\}, \\ e_{\alpha\beta} &= c^2 h^3 \left\{(\operatorname{Sin}^2 \alpha + \sin^2 \beta)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta}\right) - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, u_\beta - \sin\beta\cos\beta\, u_\alpha\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (7),$$

and the stress components are

$$\widehat{\alpha\alpha} = (\lambda + 2\mu)\, e_{\alpha\alpha} + \lambda e_{\beta\beta}, \quad \widehat{\beta\beta} = (\lambda+2\mu)\, e_{\beta\beta} + \lambda e_{\alpha\alpha}, \quad \widehat{\alpha\beta} = \mu e_{\alpha\beta} \quad \ldots (8).$$

§ 3. One type of solution. The vertical displacement of the contact surface is determined by the magnitude of the resultant of the surface tractions at the part and by the shape of the rigid body and is expanded in general in Fourier's cosine series in the interval $0 \leq \beta \leq \pi$. Hence the boundary conditions are

$$\widehat{\beta\beta} = \widehat{\alpha\beta} = 0, \quad \text{at } \beta = 0, \quad \text{and } \beta = \pi \quad \ldots \ldots (9),$$

$$u_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos 2n\beta, \quad u_\beta = 0, \quad \text{at } \alpha = 0 \quad \ldots \ldots (10).$$

Now putting

$$\left.\begin{aligned} f_1(w) &= i \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-2nw} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-(2n+1)w}, \\ f_2(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-2nw} + i \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-(2n+1)w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (11),$$

where A_n, B_n, C_n and D_n are real constants, to satisfy the boundary conditions (9), from equations (5), (6), (7) and (8), we have

---

[2]) H. Love: loc. cit. p. 54.

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\left(\operatorname{Sin}\alpha\,\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+\operatorname{Cos}\alpha\,u_\alpha\right)+\lambda\operatorname{Sin}\alpha\,\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}=0,\\ \operatorname{Sin}\alpha\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\right)-\operatorname{Cos}\alpha\,u_\beta=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (12),$$

where

$$u_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}D_n e^{-(2n+1)\alpha},$$

$$u_\beta=(\lambda+3\mu)\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-2n\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-2n\alpha},$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}=(\lambda+3\mu)\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-2n\alpha}+(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}2n\,A_n e^{-2n\alpha}+\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-2n\alpha}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}2n\cdot C_n e^{-2n\alpha},$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}=\left(1-\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}\right)\sum_{n=0}^{\infty}D_n e^{-(2n+1)\alpha}-2\mu\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,B_n e^{-(2n+1)\alpha},$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}=-\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,D_n e^{-(2n+1)\alpha},$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}=-(\lambda+3\mu)\sum_{n=1}^{\infty}2n\cdot A_n e^{-2n\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}2n\cdot C_n e^{-2n\alpha}.$$

Hence the constants must satisfy the following equations

$$\mu(\lambda+2\mu)(2n+1)\,B_n+(n\lambda-\mu)\,D_n=0\quad\ldots\ldots\ldots\ (13),$$

$$2\mu A_n+C_n=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (14).$$

By putting $\alpha=0$ in equation (5), the displacements at the contact surface are

$$\left.\begin{aligned}u_\alpha&=\sum_{n=1}^{\infty}((\lambda+3\mu)A_n+C_n)\cos 2n\beta-\sum_{n=0}^{\infty}((\lambda+3\mu)B_n-D_n)\sin(2n+1)\beta,\\ u_\beta&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin 2n\beta-\sum_{n=0}^{\infty}D_n\cos(2n+1)\beta\end{aligned}\right\}\quad .\ (15).$$

§ 4. Another type of solution. In this article, we shall obtain the stress components and displacements in a semi-infinite domain having a plane boundary and compressed by a force P which is distributed with the uniform pressure on the interval $-c\leq x\leq c$ of the boundary as is shown in Fig. 2. Such a case is readily solved by a slight calculation, we have[3])

Fig. 2.

$$\left.\begin{aligned}X_x&=\frac{P}{2\pi c}\left\{\frac{(c+x)\,y}{(c+x)^2+y^2}+\frac{(c-x)\,y}{(c-x)^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{c+x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{c-x}{y}\right\},\\ Y_y&=-\frac{P}{2\pi c}\left\{\frac{(c+x)\,y}{(c+x)^2+y^2}+\frac{(c-x)\,y}{(c-x)^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{c-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{c+x}{y}\right\},\\ X_y&=\frac{Py^2}{2\pi c}\left\{\frac{1}{(c+x)^2+y^2}-\frac{1}{(c-x)^2+y^2}\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (16).$$

[3]) H. Love: loc. cit. p. 192.

The displacements of the case are

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{P}{4\pi c\mu(\lambda+\mu)}\left\{\frac{(\lambda+2\mu)}{2}y\log\frac{(c+x)^2+y^2}{(c-x)^2+y^2}-\mu(c+x)\operatorname{arctg}\frac{c+x}{y}+\mu(c-x)\operatorname{arctg}\frac{c-x}{y}\right\},\\ v&=-\frac{P}{4\pi c\mu(\lambda+\mu)}\left\{\frac{(\lambda+2\mu)}{2}(c+x)\log((c+x)^2+y^2)+\frac{(\lambda+2\mu)}{2}(c-x)\log((c-x)^2+y^2)\right.\\ &\qquad\left.+\mu y\operatorname{arctg}\frac{c+x}{y}+\mu y\operatorname{arctg}\frac{c-x}{y}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(17).$$

At the contact surface, we have

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{P}{4c(\lambda+\mu)}x,\\ v&=-\frac{(\lambda+2\mu)P}{4\pi c\mu(\lambda+\mu)}\{(c+x)\log(c+x)+(c-x)\log(c-x)\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(18),$$

or at $\alpha=0$, they are

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{P}{4(\lambda+\mu)}\cos\beta,\\ v&=-\frac{(\lambda+2\mu)P}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\{(1+\cos\beta)\log(1+\cos\beta)+(1-\cos\beta)\log(1-\cos\beta)+2\log c\}\end{aligned}\right\}\quad(19).$$

§ 5. Solution satisfying the boundary conditions. The solutions obtained in articles 3 and 4 both satisfy the boundary condition (9), so it is evident that the sum of the two solutions also satisfies the boundary condition (9). And since, on the contact surface, the resultant of the normal tension $\widehat{\alpha\alpha}$ given in article 3 vanishes[4]), the sum of the two solutions is the solution of the case where the elastic body is compressed by the vertical force P.

Next, we will determine the arbitrary constants A_n, B_n, C_n and D_n to satisfy the boundary condition (10).

At $\alpha=0$, the displacements are

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha&=-\frac{(\lambda+2\mu)P}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\{(1+\cos\beta)\log(1+\cos\beta)+(1-\cos\beta)\log(1-\cos\beta)+2\log c\}\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}((\lambda+3\mu)A_n+C_n)\cos 2n\beta-\sum_{n=0}^{\infty}((\lambda+3\mu)B_n-D_n)\sin(2n+1)\beta,\\ u_\beta&=-\frac{P}{4(\lambda+\mu)}\cos\beta+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin 2n\beta-\sum_{n=0}^{\infty}D_n\cos(2n+1)\beta\end{aligned}\right\}\quad\ldots(20).$$

In the interval $0\leqq\beta\leqq\pi$, we can put

$$\left.\begin{aligned} \sin(2m+1)\beta&=\frac{2}{(2m+1)\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2m+1}{(2m+1)^2-4n^2}\cos 2n\beta,\\ \cos(2m+1)\beta&=-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2m+1)^2-4n^2}\sin 2n\beta,\\ (1+\cos\beta)\log(1+\cos\beta)&+(1-\cos\beta)\log(1-\cos\beta)+2\log c=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos 2n\beta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(21),$$

where

$b_0=0.615+2\log c$, $b_1=0.667$, $b_2=0.067$, $b_3=0.020$, $b_4=0.007$, $b_5=0.005$, $b_6=0.001$, $b_7=0.003$, $b_8=0.001$, $b_9=-0.001$, $b_{10}=0.002$, $b_{11}=-0.001$[5]).

[4]) Consider a semi-circle with its centre at the origin, then the radius of the circle is $\frac{c e^\alpha}{2}$ when α is taken large enough, while the stresses given by (8) are the infinitesimals of the order $e^{-2\alpha}$, the resultant of the stresses on the semi-circle vanishes when the radius becomes infinity. Therefore the resultant of the normal tension $\widehat{\alpha\alpha}$ on the contact surface must vanish.

[5]) b_n taken here is calculated by Zipperer's method (see W. Hort: Technische Schwingungslehre, 2. Aufl., S. 136) and in this case gives the approximate value with sufficient accuracy.

To satisfy the boundary condition (10), from the equation (20) we have the following relations

$$C_n = \frac{2\,n\,P}{\pi\,(\lambda+\mu)\,(4\,n^2-1)} - \frac{8\,n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{D_m}{(2\,m+1)^2-4\,n^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m\,D_m}{2\,m+1} - \frac{(\lambda+2\,\mu)\,b_0\,P}{4\,\pi\,\mu\,(\lambda+\mu)}, \\ U_0 &= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m\,(2\,m+1)}{(2\,m+1)^2-4\,n^2}\,D_m - \frac{\lambda+\mu}{2\,\mu}\,C_n - \frac{(\lambda+2\,\mu)\,b_n\,P}{4\,\pi\,\mu\,(\lambda+\mu)}, \quad n \geqq 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23),$$

where

$$a_m = \frac{(\lambda+3\,\mu)\,(m\,\lambda-\mu)}{\mu\,(\lambda+2\,\mu)\,(2\,m+1)} + 1\,.$$

From the equations (13), (14), (22) and (23) we can determine the constants A_n, B_n, C_n and D_n by solving the four systems of simultaneous equations. Inserting them in equations (5) and (8) and superposing the values given by equations (19) and (18) respectively, we can know the displacements and the stress components at any point in the elastic body.

§ 6. Numerical calculations. As an example, we will take a body of cast iron which is compressed by a rigid body with a flat face whose width is 2 mm with a vertical force of P kg weight. The displacements and the stress components on the contact surface are calculated as follows:

Taking the values of the elastic constants as $\lambda = 8{,}664$, $\mu = 8{,}204$ (unit kg weight per $\overline{\text{mm}^2}$)[6]), the simultaneous equations to determine the constants A_n, B_n, C_n and D_n are

$$A_n = -0.6099\times10^{-4}\cdot C_n\,, \qquad B_n = -0.4212\times10^{-4}\times\frac{n-0.947}{2\,n+1}\cdot D_n\,,$$

$$C_n = 0.3774\times10^{-4}\cdot\frac{n\,P}{4\,n^2-1} - 2.547\,n\sum_m\frac{D_m}{(2\,m+1)^2-4\,n^2}\,,$$

$$\sum_m\frac{3.402\,m+2.056\,n-0.327}{(2\,m+1)^2-4\,n^2}\cdot D_m = 0.1132\times10^{-4}\cdot b_n\,P + 0.305\times10^{-4}\cdot\frac{n\,P}{4\,n^2-1}\,,$$

where $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots 10.$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots 11.$

Table 1.

n	A_n	B_n	C_n	D_n
0		$-0.974\times10^{-9}\,P$		$-2.441\times10^{-5}\,P$
1	$0.596\times10^{-9}\,P$	-0.002 „	$-0.978\times10^{-5}\,P$	0.288 „
2	0.114 „	-0.009 „	-0.187 „	0.102 „
3	0.060 „	-0.007 „	-0.098 „	0.054 „
4	0.038 „	-0.004 „	-0.063 „	0.031 „
5	0.029 „	-0.003 „	-0.047 „	0.022 „
6	0.023 „	-0.002 „	-0.038 „	0.014 „
7	0.019 „	-0.002 „	-0.031 „	0.010 „
8	0.015 „	-0.001 „	-0.025 „	0.008 „
9	0.014 „	-0.001 „	-0.023 „	0.003 „
10	0.010 „	-0.001 „	-0.017 „	0.004 „
11	0.014 „		-0.023 „	

[6]) Landolt: Physikalisch-Chemische Tabellen.

Since in this case $U_1 = U_2 = U_3 = \ldots\ldots = U_n = 0$. The vertical displacement of the case is

$$U_0 = \sum_m \frac{2.166\, m - 0.208}{(2\, m + 1)^2} D_m - 0.887 \times 10^{-5}\, P.$$

The values of the constants calculated from the above simultaneous equations are tabulated in table 1.

In this case, the vertical displacement of the contact surface is

$$U_0 = -0.285 \times 10^{-5}\, P.$$

To compare the displacement of the contact surface in the case treated in article 4 with the result obtained here, the displacements of both cases are plotted in Fig. 3.

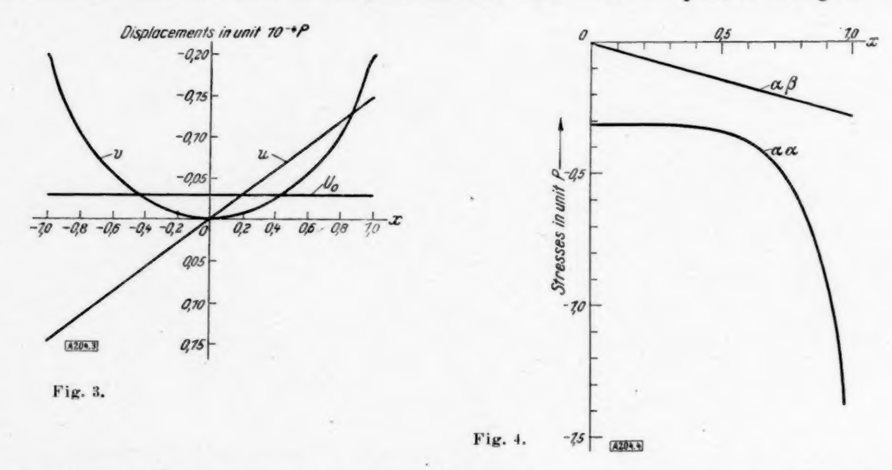


Fig. 3.

Fig. 4.

Next, we will calculate the stress components on the contact surface. From equations (7) and (8), at $\alpha = 0$, we have

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{\alpha\alpha} &= \frac{(\lambda + 2\,\mu)}{\sin\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (2\,n+1)\,(2\,\mu\, B_n - D_n)\sin(2\,n+1)\,\beta - \frac{\lambda\, P}{4\,(\lambda+\mu)} - \frac{P}{2}, \\
\widehat{\alpha\beta} &= \frac{\mu(\lambda+3\,\mu)}{\sin\beta} \sum_{n=0}^{\infty} 2\,n\, A_n \sin 2\,n\,\beta + \frac{\mu}{\sin\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (2\,n+1)\,\{(\lambda+\mu)\, B_n + D_n\}\cos(2\,n+1)\,\beta \\
&\qquad - \frac{(\lambda+2\,\mu)\, P}{4\,\pi\,(\lambda+\mu)} \{\log(1+\cos\beta) - \log(1-\cos\beta)\}
\end{aligned}\right\} \quad (24).$$

The values of stress components calculated from the above equation are plotted in Fig. 4 [7].

§ 7. Conclusion. The vertical displacement of the contact surface is not uniform and the horizontal displacement does not vanish, when the body is compressed with uniform pressure, as is shown in Fig. 3.

Likewise, the normal traction on the contact surface is not uniform and the shear does not vanish, when the contact surface is displaced vertically with uniform magnitude, as is shown in Fig. 4. Thus, we can not assume the stress distribution on the contact surface even in approximation simply by the shape of the rigid body such as is used in ordinary practice.

In conclusion, we wish to express our thanks to Prof. Iwao Kobayashi and to Prof. Seiichi Higuchi of the Tôhoku Imperial University for their kind guidance in this study.

204

[7]) A similar case is treated by M. Sadowsky under the assumption that the shearing stress on the contact surface does not exist (see Z. angew. Math. Mech., Bd. 8 (1928), S. 107).

But such an assumption is far from the actual state, since the friction between the two bodies gives the shearing stress on the contact surface. In so far as the distribution of the normal tension on the contact surface is concerned, the result $Y_y = -\frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, obtained by him is rather near in value to the result obtained here under the more actual boundary condition.

Tafel der acht ersten Kugelfunktionen zweiter Art.

Von *F. Vandrey* in Göttingen.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V., Abteilung für theoretische Aerodynamik.

Die folgenden Tafeln enthalten die Werte der Kugelfunktionen zweiter Art von Q_0 bis Q_7 im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$. Für $-1 \leqq x \leqq 0$ ergeben sich die Werte dieser Funktionen nach der Beziehung

$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1}\, Q_n(x).$$

Zur Berechnung der Tafeln wurden die Werte der Funktion

$$Q_0(x) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, x$$

neunstellig der Tafel von K. Hayashi[1]) entnommen. Die Berechnung der weiteren Funktionswerte erfolgte dann für Q_1 bis Q_4 direkt mit Hilfe der bekannten geschlossenen Ausdrücke für diese Funktionen[2]), für Q_5 bis Q_7 mit Hilfe der Rekursionsformel der Kugelfunktionen

$$n\, Q_n + (n-1)\, Q_{n-2} - (2n-1)\, x\, Q_{n-1} = 0.$$

In den Tafeln bedeutet ein Punkt oben an der letzten Ziffer, daß der betreffende Wert erhöht wurde. Lineare Interpolation ist bei Beschränkung auf drei Stellen möglich im Intervall von 0 bis ungefähr 0,86 bei Q_0 bis Q_6 und von 0 bis 0,69 bei Q_7.

x	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
0,00	+ 0,00000	− 1,00000	0,00000	+ 0,66667·	0,00000	− 0,53333	0,00000	+ 0,45714
01	+ 0,01000	− 0,99990·	− 0,02000·	+ 0,66627·	+ 0,02666·	− 0,53253	− 0,03198·	+ 0,45586
02	+ 0,02000	− 0,99960·	− 0,03999·	+ 0,66507·	+ 0,05327·	− 0,53014·	− 0,06383·	+ 0,45203
03	+ 0,03001	− 0,99910·	− 0,05996	+ 0,66307·	+ 0,07978	− 0,52615·	− 0,09542	+ 0,44567·
04	+ 0,04002	− 0,99840·	− 0,07991	+ 0,66027	+ 0,10615	− 0,52057	− 0,12664·	+ 0,43680·
0,05	+ 0,05004	− 0,99750·	− 0,09983	+ 0,65668·	+ 0,13233	− 0,51343	− 0,15734	+ 0,42548·
06	+ 0,06007	− 0,99640·	− 0,11971	+ 0,65229	+ 0,15827	− 0,50474	− 0,18742·	+ 0,41175
07	+ 0,07011	− 0,99509	− 0,13954	+ 0,64711	+ 0,18393·	− 0,49452·	− 0,21674·	+ 0,39570·
08	+ 0,08017	− 0,99359·	− 0,15932·	+ 0,64115·	+ 0,20925·	− 0,48279	− 0,24518	+ 0,37739
09	+ 0,09024	− 0,99188·	− 0,17903·	+ 0,63440·	+ 0,23419·	− 0,46958	− 0,27264·	+ 0,35693·
0,10	+ 0,10034·	− 0,98997·	− 0,19866	+ 0,62687·	+ 0,25870·	− 0,45493·	− 0,29899·	+ 0,33441
11	+ 0,11045·	− 0,98785	− 0,21822·	+ 0,61856	+ 0,28274·	− 0,43887·	− 0,32412·	+ 0,30996·
12	+ 0,12058	− 0,98553	− 0,23769·	+ 0,60948	+ 0,30626·	− 0,42144·	− 0,34793·	+ 0,28369
13	+ 0,13074·	− 0,98300	− 0,25706·	+ 0,59964	+ 0,32921·	− 0,40268·	− 0,37031	+ 0,25575·
14	+ 0,14093·	− 0,98027	− 0,27632·	+ 0,58904·	+ 0,35155	− 0,38264·	− 0,39117	+ 0,22627
0,15	+ 0,15114	− 0,97733·	− 0,29547·	+ 0,57769·	+ 0,37324	− 0,36137	− 0,41041	+ 0,19542·
16	+ 0,16139·	− 0,97418·	− 0,31450·	+ 0,56559·	+ 0,39424·	− 0,33893·	− 0,42795·	+ 0,16335·
17	+ 0,17167·	− 0,97082·	− 0,33339	+ 0,55275	+ 0,41449·	− 0,31537·	− 0,44370·	+ 0,13023
18	+ 0,18198	− 0,96724	− 0,35215·	+ 0,53918	+ 0,43395	− 0,29075·	− 0,45757	+ 0,09625
19	+ 0,19234·	− 0,96346·	− 0,37075	+ 0,52490·	+ 0,45259	− 0,26513	− 0,46952·	+ 0,06158
0,20	+ 0,20273	− 0,95945	− 0,38920	+ 0,50990	+ 0,47037·	− 0,23859·	− 0,47946·	+ 0,02642
21	+ 0,21317	− 0,95523	− 0,40748	+ 0,49420	+ 0,48723	− 0,21119·	− 0,48734·	− 0,00904
22	+ 0,22366·	− 0,95080·	− 0,42559	+ 0,47781	+ 0,50315	− 0,18300	− 0,49310	− 0,04461·
23	+ 0,23419·	− 0,94614·	− 0,44351	+ 0,46074	+ 0,51808	− 0,15411·	− 0,49672·	− 0,08008·
24	+ 0,24476	− 0,94126·	− 0,46123	+ 0,44301	+ 0,53199	− 0,12459·	− 0,49814	− 0,11524
0,25	+ 0,25541	− 0,93615·	− 0,47876	+ 0,42461	+ 0,54484·	− 0,09451	− 0,49735	− 0,14990

[1]) K. Hayashi: Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Berlin 1926.
[2]) Vgl. z. B.: E. Jahnke u. F. Emde: Funktionentafeln. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1933, S. 176.

x	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
0,25	+ 0,25541	− 0,93615˙	− 0,47876	+ 0,42461	+ 0,54484	− 0,09451	− 0,49735	− 0,14990
26	+ 0,26611˙	− 0,93081	− 0,49607	+ 0,40558˙	+ 0,55659	− 0,06398˙	− 0,49432	− 0,18385˙
27	+ 0,27686	− 0,92525˙	− 0,51316˙	+ 0,38591	+ 0,56721	− 0,03306	− 0,48904	− 0,21688˙
28	+ 0,28768	− 0,91945˙	− 0,53001˙	+ 0,36563	+ 0,57667˙	− 0,00186	− 0,48151	− 0,24879˙
29	+ 0,29857˙	− 0,91342˙	− 0,54662˙	+ 0,34474	+ 0,58492	+ 0,02953	− 0,47173	− 0,27938˙
0,30	+ 0,30952˙	− 0,90714	− 0,56297	+ 0,32328˙	+ 0,59195	+ 0,06103	− 0,45972	− 0,30845˙
31	+ 0,32055˙	− 0,90063	− 0,57907˙	+ 0,30124˙	+ 0,59772	+ 0,09254˙	− 0,44551˙	− 0,33580
32	+ 0,33165˙	− 0,89387	− 0,59488	+ 0,27864	+ 0,60220	+ 0,12395	− 0,42912˙	− 0,36126
33	+ 0,34283˙	− 0,88687˙	− 0,61041	+ 0,25552˙	+ 0,60537	+ 0,15518˙	− 0,41059	− 0,38464
34	+ 0,35409	− 0,87961˙	− 0,62565˙	+ 0,23187	+ 0,60720˙	+ 0,18611˙	− 0,38999	− 0,40577
0,35	+ 0,36544	− 0,87209	− 0,64057	+ 0,20773˙	+ 0,60766	+ 0,21664	− 0,36737	− 0,42449˙
36	+ 0,37689˙	− 0,86432	− 0,65518˙	+ 0,18311˙	+ 0,60674	+ 0,24668	− 0,34281˙	− 0,44063
37	+ 0,38842	− 0,85628	− 0,66945˙	+ 0,15803˙	+ 0,60441	+ 0,27611	− 0,31638˙	− 0,45407˙
38	+ 0,40006˙	− 0,84798˙	− 0,68338˙	+ 0,13251˙	+ 0,60065	+ 0,30484˙	− 0 28818˙	− 0,46466˙
39	+ 0,41180	− 0,83940˙	− 0,69695˙	+ 0,10658	+ 0,59545	+ 0,33274	− 0,25830	− 0,47229
0,40	+ 0,42365˙	− 0,83054	− 0,71015˙	+ 0,08026	+ 0,58879	+ 0,35972	− 0,22687˙	− 0,47686
41	+ 0,43561	− 0,82140˙	− 0,72297˙	+ 0,05357	+ 0,58066	+ 0,38567	− 0,19399˙	− 0,47828
42	+ 0,44769	− 0,81197˙	− 0,73539˙	+ 0,02654	+ 0,57105˙	+ 0,41048˙	− 0,15981˙	− 0,47649˙
43	+ 0,45990˙	− 0,80224	− 0,74740˙	− 0,00080	+ 0,55994	+ 0,43404˙	− 0,12445	− 0,47142˙
44	+ 0,47223	− 0,79222˙	− 0,75898˙	− 0,02844˙	+ 0,54734˙	+ 0,45624	− 0,08808˙	− 0,46304˙
0,45	+ 0,48470	− 0,78188	− 0,77012	− 0,05634˙	+ 0,53323˙	+ 0,47698	− 0,05085˙	− 0,45133
46	+ 0,49731	− 0,77124˙	− 0,78081˙	− 0,08446	+ 0,51761	+ 0,49615	− 0,01292	− 0,43631
47	+ 0,51007	− 0,76027˙	− 0,79102	− 0,11279	+ 0,50050˙	+ 0,51365	+ 0,02552˙	− 0,41800
48	+ 0,52298	− 0,74897˙	− 0,80075˙	− 0.14129˙	+ 0,48188	+ 0,52937	+ 0,06428	− 0,39645˙
49	+ 0,53606	− 0,73733	− 0,80997	− 0,16992	+ 0,46177	+ 0,54322˙	+ 0,10318	− 0,37172˙
0,50	+ 0,54931˙	− 0,72535˙	− 0,81866	− 0,19865	+ 0,44017	+ 0,55508	+ 0,14201	− 0,34392˙
51	+ 0,56273˙	− 0,71301˙	− 0,82682˙	− 0,22745	+ 0,41711˙	+ 0,56487˙	+ 0,18056	− 0,31312˙
52	+ 0,57634˙	− 0,70030	− 0,83441˙	− 0,25628	+ 0,39259˙	+ 0,57249˙	+ 0,21862˙	− 0,27958
53	+ 0,59015˙	− 0,68722	− 0,84141	− 0,28510	+ 0,36663˙	+ 0,57785˙	+ 0,25595˙	− 0,24337˙
54	+ 0,60416˙	− 0,67376˙	− 0,84782	− 0,31387˙	+ 0,33926	+ 0,58086˙	+ 0,29233˙	− 0,20471
0,55	+ 0,61838	− 0,65989	− 0,85360	− 0,34254˙	+ 0,31051˙	+ 0,58143	+ 0,32752	− 0,16383˙
56	+ 0,63283	− 0,64561	− 0,85873	− 0,37107	+ 0,28040˙	+ 0,57950˙	+ 0,36129˙	− 0,12097
57	+ 0,64752	− 0,63091	− 0,86319	− 0,39942	+ 0,24897˙	+ 0,57498	+ 0,39338	− 0,07642˙
58	+ 0,66246	− 0,61577	− 0,86695	− 0,42754˙	+ 0,21626	+ 0,56781˙	+ 0,42355	− 0,03047˙
59	+ 0,67767˙	− 0,60018˙	− 0,86999˙	− 0,45537	+ 0,18232˙	+ 0,55792	+ 0,45155	+ 0,01655
0,60	+ 0,69315˙	− 0,58411	− 0,87227	− 0,48287˙	+ 0,14720˙	+ 0,54526	+ 0,47713˙	+ 0,06429˙
61	+ 0,70892	− 0,56756˙	− 0,87378˙	− 0,50997˙	+ 0,11094	+ 0,52979˙	+ 0,50003	+ 0,11236
62	+ 0,72501˙	− 0,55050˙	− 0,87446	− 0,53662˙	+ 0,07362	+ 0,51145	+ 0,52000	+ 0,16036˙
63	+ 0,74142˙	− 0,53291˙	− 0,87431˙	− 0,56275˙	+ 0,03530˙	+ 0,49023˙	+ 0,53680˙	+ 0,20786˙
64	+ 0,75817	− 0,51477˙	− 0,87326	− 0,58830	− 0,00395	+ 0,46609	+ 0,55017	+ 0,25441
0,65	+ 0,77530˙	− 0,49606˙	− 0,87130	− 0,61321˙	− 0,04405˙	+ 0,43903	+ 0,55989˙	+ 0,29955˙

x	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
0,65	+ 0,77530˙	− 0,49606˙	− 0,87130	− 0,61321˙	− 0,04405˙	+ 0,43903	+ 0,55989˙	+ 0,29955˙
66	+ 0,79281	− 0,47674	− 0,86838	− 0,63739	− 0,08490	+ 0,40905	+ 0,56570	+ 0,34277
67	+ 0,81074	− 0,45680	− 0,86446˙	− 0,66078˙	− 0,12642˙	+ 0,37616	+ 0,56740˙	+ 0,38358
68	+ 0,82911	− 0,43620	− 0,85948	− 0,68328˙	− 0,16849	+ 0,34039	+ 0,56476	+ 0,42145
69	+ 0,84796˙	− 0,41491	− 0,85341	− 0,70481	− 0,21101˙	+ 0,30178	+ 0,55759	+ 0,45585˙
0,70	+ 0,86730	− 0,39289˙	− 0,84618	− 0,72529˙	− 0,25384	+ 0,26039	+ 0,54570	+ 0,48622
71	+ 0,88718	− 0,37010˙	− 0,83775˙	− 0,74460	− 0,29686˙	+ 0,21630˙	+ 0,52893˙	+ 0,51203
72	+ 0,90764	− 0,34650˙	− 0,82804˙	− 0,76265˙	− 0,33991˙	+ 0,16960˙	+ 0,50713˙	+ 0,53273
73	+ 0,92873˙	− 0,32203˙	− 0,81699˙	− 0,77931	− 0,38283	+ 0,12041˙	+ 0,48017	+ 0,54777
74	+ 0,95048˙	− 0,29665˙	− 0,80452˙	− 0,79447	− 0,42546˙	+ 0,06887	+ 0,44798	+ 0,55662
0,75	+ 0,97296˙	− 0,27028	− 0,79055˙	− 0,80799	− 0,46758	+ 0,01516˙	+ 0,41050˙	+ 0,55877˙
76	+ 0,99622˙	− 0,24288˙	− 0,77499˙	− 0,81973	− 0,50900	− 0,04053	+ 0,36770˙	+ 0,55372˙
77	+ 1,02033˙	− 0,21435˙	− 0,75774˙	− 0,82953˙	− 0,54949˙	− 0,09797˙	+ 0,31961˙	+ 0,54101
78	+ 1,04537	− 0,18461	− 0,73868	− 0,83721	− 0,58878	− 0,15688	+ 0,26631	+ 0,52024
79	+ 1,07143	− 0,15357˙	− 0,71770˙	− 0,84259˙	− 0,62660	− 0,21696	+ 0,20794˙	+ 0,49104
0,80	+ 1,09861	− 0,12111	− 0,69464˙	− 0,84544	− 0,66264	− 0,27785	+ 0,14469˙	+ 0,45312
81	+ 1,12703˙	− 0,08711˙	− 0,66935˙	− 0,84555	− 0,69656˙	− 0,33914˙	+ 0,07684	+ 0,40628
82	+ 1,15682˙	− 0,05141˙	− 0,64134	− 0,84264˙	− 0,72795	− 0,40035˙	+ 0,00477	+ 0,35042
83	+ 1,18814˙	− 0,01385˙	− 0,61132	− 0,83641	− 0,75641˙	− 0,46094	− 0,07106	+ 0,28556˙
84	+ 1,22117	+ 0,02579˙	− 0,57810˙	− 0,82653˙	− 0,78142	− 0,52029˙	− 0,15006˙	+ 0,21187˙
0,85	+ 1,25615	+ 0,06773˙	− 0,54172	− 0,81259	− 0,80244˙	− 0,57766˙	− 0,23149˙	+ 0,12972˙
86	+ 1,29334	+ 0,11228˙	− 0,50184˙	− 0,79415˙	− 0,81882˙	− 0,63221˙	− 0,31444˙	+ 0,03969
87	+ 1,33308˙	+ 0,15978˙	− 0,45803	− 0,77066˙	− 0,82981˙	− 0,68295	− 0,39780	− 0,05735˙
88	+ 1,37577˙	+ 0,21068˙	− 0,40979	− 0,74148˙	− 0,83453	− 0,72872˙	− 0,48022	− 0,16020
89	+ 1,42193˙	+ 0,26551	− 0,35650	− 0,70582	− 0,83194˙	− 0,76811˙	− 0,56002˙	− 0,26725˙
0,90	+ 1,47222˙	+ 0,32500˙	− 0,29736	− 0,66271˙	− 0,82075˙	− 0,79944˙	− 0,63512	− 0,37633˙
91	+ 1,52752	+ 0,39005˙	− 0,23135˙	− 0,61091˙	− 0,79936	− 0,82063˙	− 0,70295˙	− 0,48458
92	+ 1,58903˙	+ 0,46190	− 0,15708	− 0,54880	− 0,76575	− 0,82905˙	− 0,76020	− 0,58824
93	+ 1,65839	+ 0,54230	− 0,07268	− 0,47419	− 0,71724˙	− 0,82130	− 0,80262	− 0,68227˙
94	+ 1,73805˙	+ 0,63377˙	+ 0,02459˙	− 0,38399	− 0,65011˙	− 0,79279˙	− 0,82448	− 0,75978˙
0,95	+ 1,83178	+ 0,74019	+ 0,13888	− 0,27356	− 0,55896	− 0,73697	− 0,81776	− 0,81107
96	+ 1,94591	+ 0,86807	+ 0,27707	− 0,13540	− 0,43528˙	− 0,64384	− 0,77043˙	− 0,82170˙
97	+ 2,09230˙	+ 1,02953˙	+ 0,45181	+ 0,04408	− 0,26403	− 0,49627˙	− 0,66250˙	− 0,76807
98	+ 2,29756˙	+ 1,25161˙	+ 0,69108	+ 0,29437˙	− 0,01348˙	− 0,25926	− 0,45458	− 0,60511
99	+ 2,64665	+ 1,62019˙	+ 1,08265	+ 0,70625˙	+ 0,41159	+ 0,16845	+ 0,03725	− 0,07590˙
1,00	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞

Abgeschlossen im August 1939. 156

Über Interpolation von Kurvenscharen mit Anwendung auf die Berechnung von Geschoßflugbahnen.

Von *R. Sauer* in Aachen.

Bei Problemen der angewandten Analysis liegt häufig die Aufgabe vor, nicht nur eine einzelne Integralkurve einer Differentialgleichung, sondern eine ganze Integralkurvenschar zu ermitteln. Man versucht dann aus möglichst wenig durchgerechneten Einzelkurven die übrigen Kurven der Schar durch Interpolation zu erhalten. Im folgenden wird gezeigt, wie durch gewisse affine Transformationen die Interpolationsgenauigkeit gesteigert und dementsprechend die Anzahl der unmittelbar zu berechnenden Integralkurven verringert werden kann. Das Verfahren läßt sich in besonders einfacher Weise auf die Berechnung von Geschoßflugbahnen anwenden. Es spezialisiert sich hierbei zu der Interpolationsmethode, die kürzlich H. Athen[1]) aus einem Ansatz von K. Popoff[2]) entwickelt hat.

1. Voraussetzungen. Die zu interpolierende einparametrige Kurvenschar (Parameter λ) denken wir uns in rechtwinkligen Koordinaten x, y mit Benützung einer Hilfsvariablen t dargestellt durch

$$x = x(t, \lambda), \qquad y = y(t, \lambda) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Die Gl. (1) definieren neben den zu interpolierenden Kurven $\lambda = \text{const}$ (kurz „λ-Kurven") noch eine zweite Schar von Kurven $t = \text{const}$ (kurz „t-Kurven"), welche auf den λ-Kurven nach t bezifferte Skalen ausschneiden (Bild 1; die λ-Kurven sind durchgezogen, die t-Kurven gestrichelt).

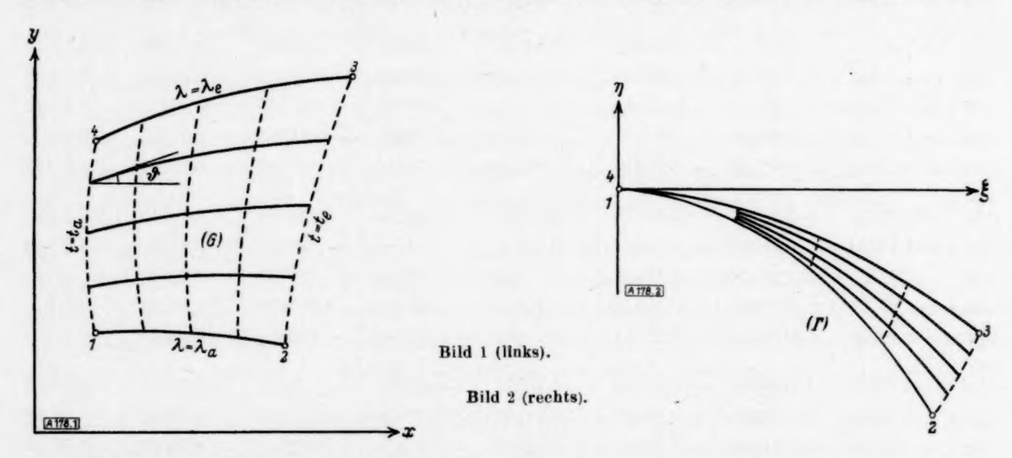


Bild 1 (links).

Bild 2 (rechts).

Wir setzen ein für allemal voraus:

a) Das betrachtete x, y-Gebiet (G) ist einfach zusammenhängend und wird von 2 λ-Kurven $(\lambda = \lambda_a, \lambda = \lambda_e)$ sowie von 2 t-Kurven $(t = t_a, t = t_e)$ begrenzt. Die Kurven $t = t_a = 0$ und $t = t_e$ dürfen auch zu Punkten einschrumpfen.

b) Die λ-Kurven und t-Kurven bilden in dem Gebiet (G) ein Kurvennetz, d. h. durch jeden Innenpunkt von (G) geht genau eine λ-Kurve und eine t-Kurve.

c) Die λ-Kurven haben stetig veränderliche Tangenten und Krümmungskreise. Sie sollen bei $t = 0$ mit nicht verschwindender Krümmung und nicht zur x-Achse senkrechter Tangente beginnen. Für die Anfangswerte von x, y bei $t = 0$ und ihre ersten und zweiten Ableitungen führen wir die Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} &x(0, \lambda) = a_0(\lambda), \quad y(0, \lambda) = b_0(\lambda); \\ &\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = a_1(\lambda) \neq 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = b_1(\lambda); \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t=0} = a_2(\lambda), \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t=0} = b_2(\lambda) \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Für den Tangentenwinkel $\vartheta(\lambda)$ und die Krümmung $\frac{1}{r(\lambda)}$ bei $t = 0$ hat man dann

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{b_1}{a_1} \neq \pm \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1^2 + b_1^2)^{3/2}} \neq 0.$$

[1]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S 361 bis 371.
[2]) C. Cranz: Ballistik, Ergänzungsband, Berlin 1936, S. 47 bis 49.

Für das Folgende ist es belanglos, ob die zu interpolierende Kurvenschar (1) durch Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\psi(x,y)$$

oder durch Differentialgleichungen höherer Ordnung vorgegeben ist und ob der Parameter λ lediglich in den Anfangsbedingungen $a_0(\lambda)$, $b_0(\lambda)$ usf. oder auch in den Differentialgleichungen selbst explizit auftritt. Die Differentialgleichungen werden beim Interpolieren nur zur Berechnung der Anfangswerte a_1, b_1 usf. verwendet.

2. Affintransformation der zu interpolierenden Kurven. Vor der Interpolation wird das Gebiet (G) der xy-Ebene durch eine Transformation (T) folgendermaßen in ein Gebiet (Γ) einer ξ,η-Ebene verzerrt (Bild 2):

a) Jede λ-Kurve von (G) wird affin in eine λ-Kurve von (Γ) transformiert.

b) Alle t-Skalen der λ-Kurven von (Γ) stimmen für $t=0$ in den Anfangswerten

$$\xi(0,\lambda)=\eta(0,\lambda)=0; \quad \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}=\alpha_1\neq 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}=0; \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t=0}=\alpha_2, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t=0}=\beta\neq 0 \quad . \quad (3)$$

überein; die von λ unabhängigen Konstanten $\alpha_1\neq 0, \alpha_2, \beta\neq 0$ können willkürlich gewählt werden. Die Bedingungen (3) bedeuten geometrisch, daß die t-Skalen aller λ-Kurven des Bereiches (Γ) die 3 ersten „unendlich benachbarten" Skalenpunkte gemeinsam haben. Außerdem folgt aus (3):

c) Alle λ-Kurven von (Γ) beginnen im Koordinatenanfangspunkt $\xi=\eta=0$, haben dort die ξ-Achse als gemeinsame Tangente sowie die nämliche nicht verschwindende und endliche Krümmung

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\beta}{\alpha_1^2}\neq 0.$$

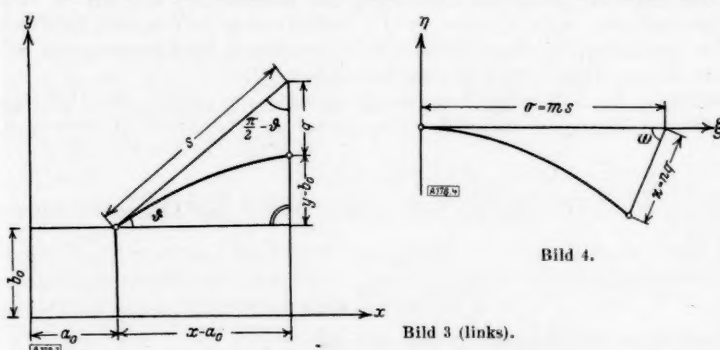


Bild 3 (links).

Bild 4.

Die affin verzerrten λ-Kurven erhält man durch folgende einfache Konstruktion (Bild 3 und Bild 4):

Die Punkte einer λ-Kurve seien in (G) durch die schiefwinkligen Koordinaten

$$s=\frac{x-a_0}{\cos\vartheta}, \quad q=(x-a_0)\operatorname{tg}\vartheta-(y-b_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

festgelegt. Diese Koordinaten s,q werden bei der affinen Deformation der λ-Kurve in

$$\sigma=m\,s, \qquad \varkappa=n\,q \qquad (m\neq 0, n\neq 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

verzerrt, während der Koordinatenwinkel $\frac{\pi}{2}-\vartheta$ in ω übergeht. Hierbei ist

$$m^2=\frac{\alpha_1^2}{a_1^2+b_1^2}, \qquad n^2=\frac{1}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}(a_1^2\beta^2+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)^2), \qquad \operatorname{tg}\omega=\frac{a_1\beta}{a_1\alpha_2-a_2\alpha_1} \qquad (6),$$

wie sich aus (4) und (5) durch zweimalige Differentiation nach t bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (2) und (3) sowie der Gleichungen

$$\xi=\sigma-\varkappa\cos\omega, \qquad \eta=\varkappa\sin\omega$$

nach kurzer Rechnung ergibt.

Man beachte, daß m, n und ω Funktionen von λ sind, die λ-Kurven also durch verschiedene Affintransformationen verzerrt werden. Die Transformation (T) des Gebietes (G) in das Gebiet (Γ) ist infolgedessen selbst keine affine Transformation.

3. Interpolationsvorschrift. Unter Beschränkung auf einen nicht zu großen t-Bereich werden durch die Transformation (T) des Gebietes (G) in das Gebiet (Γ) die λ-Kurven samt den ihnen aufgeprägten t-Skalen einander angenähert (vgl. Bild 1 und Bild 2) und die Bogen-

längen der t-Kurven verkürzt; denn auf Grund der Bedingungen (3) hat man bei $t=0$ für die Bogenlängen $L\ (t)$ der t-Kurven des Bereiches (Γ)

$$L=0, \qquad \frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\,t}=0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\,L}{\mathrm{d}\,t^2}=0,$$

d. h. die 3 ersten „unendlich benachbarten" t-Kurven von (Γ) schrumpfen auf Punkte ein. Infolgedessen liefert die Interpolation der λ-Kurven im deformierten Gebiet (Γ) genauere Ergebnisse als im Gebiet (G) vor der Deformation. Dies gibt Anlaß zu folgender Interpolationsvorschrift:

a) Von der gesuchten λ-Kurvenschar des Gebietes (G) werden einige Kurven, etwa die Kurven $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$, durch Integration der vorgelegten Differentialgleichungen unmittelbar berechnet.

b) Die Kurven λ_1, λ_2, λ_3 werden auf Grund der Gl. (5) von (G) in das Gebiet (Γ) affin transformiert.

c) Zwischen entsprechenden Skalenpunkten der t-Skalen der Kurven λ_1, λ_2, λ_3 des Gebietes (Γ) wird linear oder quadratisch interpoliert, wodurch sich in (Γ) zwischengeschaltete λ-Kurven samt t-Skalen ergeben.

d) Die nach c) in (Γ) zwischengeschalteten λ-Kurven werden gemäß (5) affin in das Gebiet (G) zurückübertragen.

Sowohl die affinen Verzerrungen als auch die lineare oder quadratische Interpolation kann rechnerisch oder zeichnerisch durchgeführt werden.

Falls die erzielte Genauigkeit noch nicht ausreicht, ist die Anzahl der berechneten λ-Kurven in a) zu vergrößern oder der t-Bereich in entsprechend kleinere Teilbereiche zu zerlegen.

4. Abschätzung der Genauigkeit. Bei der Abschätzung der Genauigkeit handelt es sich erstens um die bei der Interpolation der λ-Kurven in (Γ) auftretenden Fehler und zweitens um die Vergrößerung oder Verkleinerung dieser Fehler bei der affinen Rückübertragung der zwischengeschalteten λ-Kurven aus dem Gebiet (Γ) in das Gebiet (G).

a) Die Interpolationsfehler $\Delta\,\sigma, \Delta\,\varkappa$ in (Γ) werden näherungsweise gleich der Differenz der quadratisch interpolierten Werte $\sigma_q, \varkappa_q$ gegenüber den linear interpolierten Werten $\sigma_l, \varkappa_l$ gesetzt:

$$\Delta\,\sigma=\sigma_q-\sigma_l, \qquad \Delta\,\varkappa=\varkappa_q-\varkappa_l.$$

b) Aus den Fehlern $\Delta\,\sigma, \Delta\,\varkappa$ in (Γ) ergeben sich mittels (5) bei der affinen Rückübertragung nach (G) die Fehler

$$\Delta\,s=\frac{1}{m}\,\Delta\,\sigma, \qquad \Delta\,q=\frac{1}{n}\,\Delta\,\varkappa.$$

Als Längenfehler der interpolierten Punkte in (G) hat man also

$$f=\sqrt{(\Delta\,x)^2+(\Delta\,y)^2}=\sqrt{\frac{1}{m^2}(\Delta\,\sigma)^2+\frac{1}{n^2}(\Delta\,\varkappa)^2-\frac{2}{m\,n}\sin\vartheta\,\Delta\,\sigma\,\Delta\,\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

5. Anwendung auf die Interpolation von Flugbahnscharen. Besonders einfach gestaltet sich das Interpolationsverfahren bei der Anwendung auf die Berechnung von Luftschußtafeln. Hierbei sind für ein vorgegebenes Geschütz und Geschoß und ein empirisch bestimmtes Luftwiderstandsgesetz bei normierten atmosphärischen Bedingungen die von einem festen Anfangspunkt $x=y=0$ mit einer festen Anfangsgeschwindigkeit v_0 ausgehenden Geschoßflugbahnen zu bestimmen. Sie ergeben sich aus den Differentialgleichungen[3])

$$\ddot{x}=-c\,(y)\,v\,\dot{x}\,K\,(v,y), \qquad \ddot{y}=-c\,(y)\,v\,\dot{y}\,K\,(v,y)-g\,(y) \qquad (v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2) \quad . \quad . \quad (8)$$

für die Anfangsbedingungen $x=y=0$, $v=v_0$, $\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)_0=\operatorname{tg}\vartheta$ bei $t=0$. Die Punkte bedeuten Differentiationen nach der Zeit t.

Als Parameter der Flugbahnschar nehmen wir den Abgangswinkel $\vartheta=\lambda$. Die λ-Kurven sind die gesuchten Flugbahnen, die t-Kurven sind die Kurven gleicher Geschoßflugzeit. Die Kurve $t=0$ entartet zum Anfangspunkt $x=y=0$, das Gebiet (G) wird begrenzt von 2 Flugbahnen $\vartheta=\lambda_1$, $\vartheta=\lambda_2$ und einer Geschoßflugzeitkurve $t=t_e$ (Bild 5).

Mit Benutzung der Differentialgleichungen (8) erhält man für die Anfangswerte (2)

$$a_0=b_0=0;\ a_1=v_0\cos\vartheta\left(\vartheta\neq\frac{\pi}{2}\right),\ b_1=v_0\sin\vartheta;\ a_2=-c_0\,v_0^2\,K_0\cos\vartheta,\ b_2=-c_0\,v_0^2\,K_0\sin\vartheta-g_0.$$

[3]) C. Cranz: Ballistik, Ergänzungsband, Berlin 1936, S. 58.

Durch geeignete Wahl der noch willkürlichen Anfangswerte (3), nämlich

$$a_1 = v_0, \qquad a_2 = -c_0 v_0^2 K_0, \qquad \beta = g_0$$

spezialisieren sich die Gl. (6) zu

$$m = n = 1, \quad \omega = \pi/2$$

und die Affinitäten (5) zu

$$\sigma = s, \quad \varkappa = q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

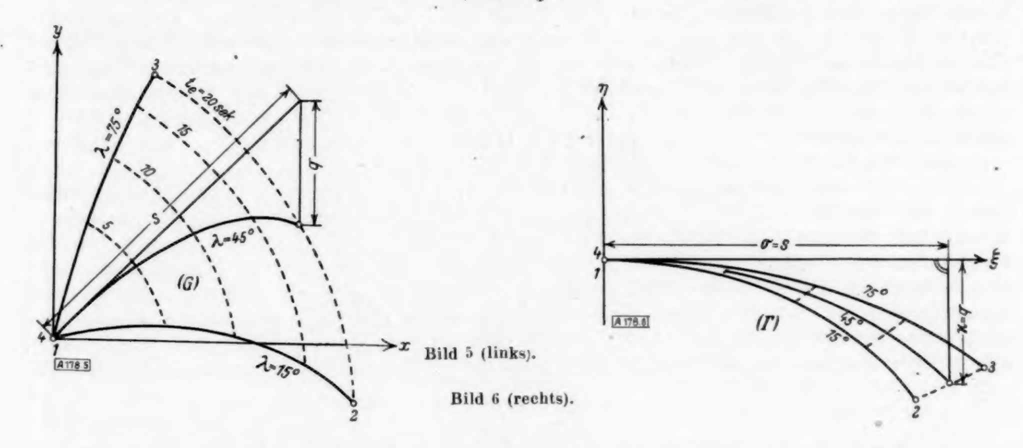


Bild 5 (links).

Bild 6 (rechts).

Die Konstruktionsvorschrift für die affinen Verzerrungen wird also denkbar einfach (Bild 5 und Bild 6): Die schiefwinkligen Koordinaten s, q der nichtverzerrten Flugbahnen in (G) sind gleich den rechtwinkligen Koordinaten $\sigma, \varkappa$ der verzerrten Flugbahnen in (Γ).

Aus (7) und (9) folgt

$$f^2 = (\varDelta s)^2 + (\varDelta q)^2 - 2\,\varDelta s\,\varDelta q \sin\vartheta < (|\varDelta s| + |\varDelta q|)^2 \leqq 2\,[(\varDelta s)^2 + (\varDelta q)^2],$$

d. h.: Bei der affinen Rückübertragung der in (Γ) durch lineare oder quadratische Interpolation zwischengeschalteten λ-Kurven in das unverzerrte Schußtafelgebiet (G) ist die etwaige Vergrößerung der Längenfehler stets kleiner als $\sqrt{2}$.

Das hier durch Spezialisierung von (6) hergeleitete Interpolationsverfahren deckt sich mit der eingangs erwähnten Methode[1]) von H. Athen.

Nach Nr. 2 werden bei den affinen Deformationen (9) alle Flugbahnen in Kurven verzerrt, welche im Anfangspunkt den nämlichen Krümmungskreis besitzen. Dies ergibt sich auch unmittelbar durch folgende einfache geometrische Überlegung (Bild 7):

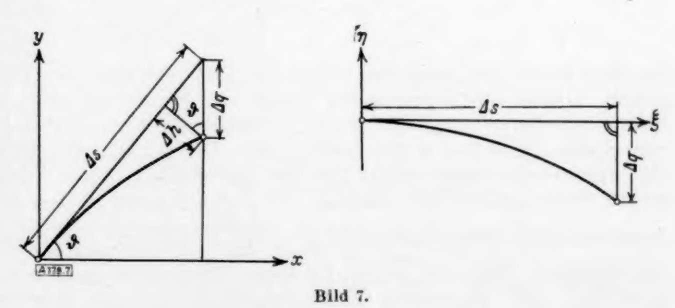


Bild 7.

Für die Krümmung $\frac{1}{r_0}$ der nichtverzerrten Flugbahnen im Anfangspunkt hat man

$$\frac{1}{r_0} = \lim_{\varDelta s \to 0} \frac{2\,\varDelta h}{(\varDelta s - \varDelta q \sin\vartheta)^2} = \lim_{\varDelta s \to 0} \frac{2\,\varDelta q \cos\vartheta}{(\varDelta s)^2},$$

für die Krümmungen $\frac{1}{\varrho_0}$ der verzerrten Flugbahnen dagegen

$$\frac{1}{\varrho_0} = \lim_{\varDelta s \to 0} \frac{2\,\varDelta q}{(\varDelta s)^2} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Hieraus und aus dem Ansatz der Normalbeschleunigung im Anfangspunkt

$$\frac{v_0^2}{r_0} = g_0 \cos \vartheta$$

folgt sofort

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{g_0}{v_0^2} = \text{const}.$$

6. Verallgemeinerung und Anwendung auf ein weiteres ballistisches Problem. Das hier beschriebene Interpolationsverfahren geht davon aus, daß die Kurvenschar vor der Interpolation in eine Schar von Kurven affin deformiert wird, welche 3 „unendlich benachbarte" Punkte gemeinsam haben. Wenn von der Kurvenschar nicht nur Anfangswerte (Anfangspunkte, Anfangstangenten usw.) sondern auch Endwerte bekannt sind, läßt sich das Verfahren verallgemeinern, derart, daß an Stelle der 3 „unendlich benachbarten" gemeinsamen Punkte 2 „unendlich benachbarte" und ein dritter nicht benachbarter Punkt treten.

Als Beispiel erwähnen wir folgendes ballistische Problem:

Für ein vorgegebenes Geschütz und Geschoß und eine vorgegebene Anfangsgeschwindigkeit v_0 sind die Schußweiten x in Abhängigkeit vom Abgangswinkel ϑ bekannt („Erdschußtafel"); gesucht sind die zugehörigen Flugbahnen („Luftschußtafel"). Da man jetzt für die Flugbahnen neben Anfangspunkt und Anfangstangenten auch die Endpunkte kennt, kann man die Flugbahnen vor der Interpolation affin so deformieren, daß sie alle mit gemeinsamer Tangente vom Anfangspunkt abgehen und in einem festen Endpunkt einmünden. Die so verzerrten Kurven werden unter Umständen noch weniger voneinander abweichen als bei den affinen Deformationen (5) und infolgedessen noch bessere Interpolationsergebnisse liefern. 178

Messung der Krümmung von flachen Kurven.

Von *Klaus Katterbach* in Göttingen.

(Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen, Institut für instationäre Vorgänge.)

I. Einleitung. Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen von Versuchen, welche die Ermittlung der an bewegten Körpern wirksamen Kräfte zur Aufgabe hatten. Da die direkte Messung dieser Kräfte nicht möglich war, wurden die Körperbahnen photographisch festgehalten mit dem Ziel, ihre Bahnkrümmung in einer Reihe von Punkten zu bestimmen und daraus die Normalkräfte zu berechnen. Zur Bestimmung der Bahnkrümmung wurden zunächst die bekannten Meßverfahren herangezogen. Die Ergebnisse verschiedener Meßreihen wichen aber zu stark voneinander ab und konnten daher keineswegs befriedigen. Die Ursache dafür lag in der flachen Form der Versuchskurven.

Fast alle bisher bekannten Verfahren beruhen nämlich auf der zweimaligen Differentiation und der Anwendung der Formel

$$\frac{1}{r} = y'' \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Sie sind daher mit denselben Schwierigkeiten behaftet wie allgemein die graphische Differentiation. Diese sind vornehmlich einmal die genaue Konstruktion der Tangente, zum andern Interpolationsschwierigkeiten beim Zeichnen der Kurven y und y', da die gegebenen Punkte von y selten und von y' nie exakt sind. Bei Kurven mit großen Krümmungsradien kommt ein weiterer Umstand hinzu, der die Anwendung dieser Verfahren unmöglich macht. Für solche flache Kurven ist nämlich die Änderung der ersten Ableitung innerhalb eines nicht zu großen Intervalls gering und, da $y'' = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$ ist, der Winkel φ von der Größenordnung der absoluten Meßgenauigkeit. Es kann daher nicht mehr mit Sicherheit angegeben werden, inwieweit eine gemessene Krümmungsänderung den gegebenen Verhältnissen entspricht oder auf einen Meßfehler zurückzuführen ist.

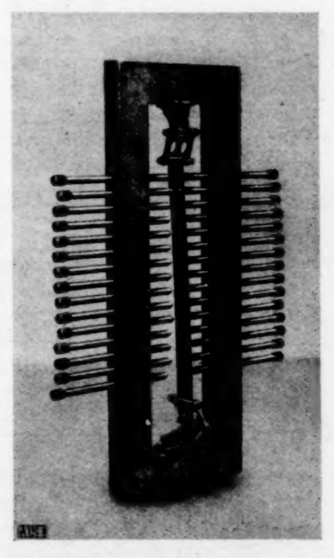
Die übrigen Krümmungsmeßverfahren, nach denen der Krümmungsradius durch Anlegen eines starren Lineals mit bekannter Krümmung ermittelt wird, fallen für genaue Messungen aus, da ihre Genauigkeit bestenfalls 10—20% beträgt. Ein besonderer Vorteil dieser „Anlegeverfahren" ist es, daß sie im Gegensatz zu den Differentiationsverfahren bei ihrer Durchführung unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems sind und hierin der Invarianz der Krümmung gegenüber orthogonalen Koordinatentransformationen entsprechen. Daher lag der Gedanke einer Weiterentwicklung dieser Verfahren nahe, bei der das starre Kurvenlineal durch ein biegsames ersetzt wurde, dessen Krümmung dann besonders zu bestimmen war.

Die ersten Versuche befaßten sich mit einem Verfahren, das zwar nicht zum gewünschten Erfolg geführt werden konnte, in seiner Art aber sehr interessant ist und zudem erst den Weg zur endgültigen Lösung vorgezeichnet hat. Aus diesen Gründen sei es hier unter dem Namen des „elastomechanischen“ Verfahrens aufgeführt. Der Vorschlag dieses Verfahrens und seine erste Ausführung stammt von Dr. Heinz Billing (z. Zt. bei der Wehrmacht). Daraus wurde das „elastooptische“ Verfahren entwickelt, welches sich in der Anwendung und hinsichtlich der Meßgenauigkeit allen andern Verfahren als überlegen erwies.

II. Das elastomechanische Krümmungsmeßverfahren. Bei der Durchbiegung eines Balkens gilt für den Krümmungsradius die Beziehung $\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I}$, worin r den Radius, M das Biegemoment, E den Elastizitätsmodul, I das Trägheitsmoment, also $E \cdot I$ die Biegesteifigkeit des Balkens bedeuten. Auf dieser Beziehung wurden die Versuche aufgebaut.

Eine Blattfeder aus Stahl oder Tombak von etwa 0,5 mm Stärke ist in einem Rahmen aus Isolierstoff so aufgehängt, daß ihre Enden frei beweglich sind (Bild 1). Zu beiden Seiten der Feder sind eine Reihe Stellschrauben angebracht, mit denen der Feder die der Bahnkurve entsprechende Krümmung gegeben wird. Zur Einstellung wird ein Diapositiv der zu messenden Kurve über die Feder gelegt. Durch Lenker an den Enden der Feder und Angriff der Stellschrauben in der Symmetrieebene ist dafür gesorgt, daß die Feder nicht tordiert wird.

Zu messen sind gemäß obiger Beziehung bei bekannter Biegesteifigkeit die Momente bzw. die Biegekräfte, d. h. die Druckkräfte zwischen Schrauben und Feder. Zu diesem Zwecke wird über die Feder im Berührungspunkt einer Schraube ein Gehänge gelegt, das mit einer Waagschale verbunden ist. Die Waagschale wird so weit belastet, bis die Feder von der Schraube gerade abhebt. Zur genannten Feststellung des Moments der Abhebung sind Feder und Schraube in einen Stromkreis geringer Spannung gelegt, der beim Abheben unterbrochen wird. Zur besseren Isolation ist die Oberfläche geölt.



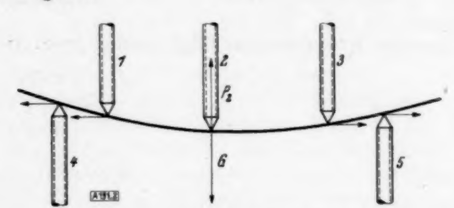


Bild 2. Elastomechanisches Verfahren. Durchbiegung der Feder durch fünf Schrauben und Darstellung der Kräfte, die durch das Gewicht G zu überwinden sind.

Bild 1 (links). Aufhängung und Lenkerführung der Feder bei den elastischen Verfahren.

Die Meßergebnisse mit dieser Anordnung sind für Kurven mit konstanter Krümmung befriedigend. Die Abweichungen betragen, wenn die Feder in jeder Beziehung möglichst gleichmäßig ist, rd. 5 %. Bei andersartigen Kurven aber weichen die einzelnen Messungen voneinander stark ab. Zur Erklärung dieser Tatsache betrachten wir Bild 2. Der Feder ist durch eine Anzahl Schrauben die gewünschte Krümmung gegeben. Nach obigem sind die von den Schrauben aufgenommenen Druckkräfte zu messen, was durch Belastung der Waagschale mit einem P_2 entsprechenden Gewicht G geschieht. Ist G genau P_2, so wird zwar die Schraube entlastet, aber Feder und Schraube bleiben weiterhin in Kontakt. Zum Abheben der Feder ist ein Übergewicht G_u erforderlich, das einmal die elastische Kraft der Feder, zum andern die Reibung an den übrigen Schraubenspitzen (dargestellt durch die kleinen Pfeile) zu überwinden hat. G_u wird demnach größer 1. mit wachsender Krümmung und 2. mit wachsender Anzahl der zur Einstellung erforderlichen Schrauben. Der Meßfehler ist aber gleich diesem Übergewicht, das von der Gesamtkraft nicht getrennt werden kann ($G = P_2 + G_u$).

Da die Kräfte von der Durchbiegung der Feder abhängig sind und zwischen zwei Federeinstellungen immer kleine Differenzen sein werden, ist auch die Erklärung gegeben, warum zwei Meßreihen schlecht übereinstimmen.

Also auch dieses Verfahren befriedigt genau so wenig wie die anderen. Es würde vielleicht zum Erfolge führen, wenn man sich von dem Übergewicht freimachen könnte, indem man die Druckkräfte direkt mißt, etwa durch Deformation kleiner Meßfedern. Diese Möglichkeit ist nicht weiter untersucht worden, da das folgende Verfahren mehr Aussicht auf Erfolg hatte.

III. Elastooptisches Verfahren. Bei diesem Verfahren wird eine Verbindung zwischen dem elastomechanischen und einem aus der praktischen Optik bekannten Krümmungsmeßverfahren für optische Flächen hergestellt. Wie oben wird einer elastischen Feder mittels Schrauben die gewünschte Krümmung gegeben. Die Feder ist jedoch in diesem Falle auf einer Seite mit einer optischen Ansprüchen genügenden Verspiegelung versehen. Gemäß Bild 3 fallen die von einem Objekt O ausgehenden Lichtstrahlen durch eine Zylinderlinse L auf die als Zylinderspiegel wirkende Feder, werden hier reflektiert und ergeben nach nochmaligem Durchgang durch die Linse ein Bild O' von O, das zwar in Richtung der parallelen Achsen von Linse und Spiegel verzerrt, senkrecht dazu aber unverzerrt ist. Bei geeigneter Linsenstellung kommen Objekt und Bild zur Deckung, bzw. sie fallen in eine Ebene senkrecht zur optischen Achse der Anordnung. Mit den Bezeichnungen des Bildes 3 folgt dann:

$$r = x + b$$

oder nach $\frac{1}{b} - \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$:

$$b = \frac{f\,y}{f-y}.$$

Also

$$r = x + \frac{f\,y}{f-y}.$$

Für konvexe Krümmungen folgt analog nach Bild 4:

$$r = b - x,$$

$$b = -\frac{f\,y}{f-y},$$

$$r = -\left(x + \frac{f\,y}{f-y}\right).$$

Da f die Brennweite der Linse ist, sind also zur Bestimmung von r nur die beiden Abstände x und y zu messen[1]).

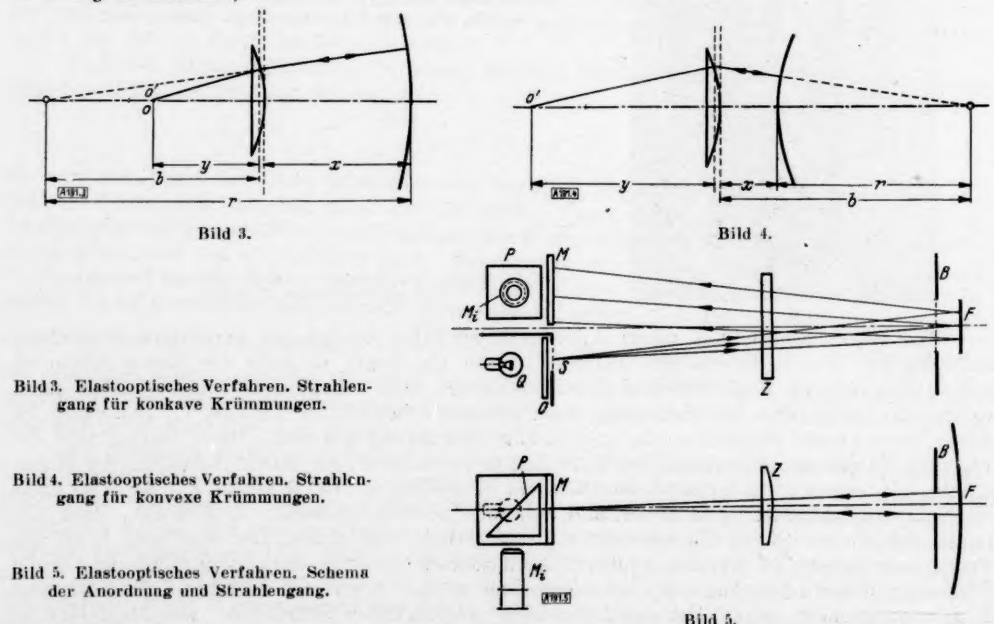


Bild 3.

Bild 4.

Bild 3. Elastooptisches Verfahren. Strahlengang für konkave Krümmungen.

Bild 4. Elastooptisches Verfahren. Strahlengang für konvexe Krümmungen.

Bild 5. Elastooptisches Verfahren. Schema der Anordnung und Strahlengang.

Bild 5.

[1]) Bei der Messung ist die Lage der Linsenhauptpunkte, die experimentell festgelegt werden müssen, zu berücksichtigen.

Die Anordnung des Apparates zeigt schematisch Bild 5. Ein Doppelspalt S wird mit einer intensiven Lichtquelle Q beleuchtet. Die Opalglasscheibe O zwischen Lichtquelle und Spalt gibt das gewünschte, gleichmäßige Streulicht. Das Spaltbild entsteht bei entsprechender Linsenstellung Z auf der Mattscheibe M und wird über ein Prisma P mit einem Mikroskop M_i von etwa 10—12 facher Vergrößerung betrachtet. Doppelspalt und Mattscheibe liegen in einer Ebene. Zur Messung wird durch eine Spaltblende B von der Feder F ein schmaler Bereich von etwa 2—3 mm ausgeblendet und senkrecht zur optischen Achse eingestellt. Zu diesem Zwecke ruht der Rahmen, in dem die Feder hängt, in einer Aufnahmevorrichtung, die sowohl gedreht als auch in der Längsrichtung der Feder verschoben werden kann, so daß jede gewünschte Einstellung der Spiegelfläche möglich ist. Sodann wird die Linse Z, die zweckmäßig chromatisch korrigiert ist, so lange verschoben, bis das Bild auf der Mattscheibe die größte Schärfe hat. Schließlich folgt die Messung der Abstände. Die Genauigkeit, mit der sie gemessen werden müssen, ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung für r. Danach ist für x eine Messung bis auf einige Millimeter vollkommen ausreichend. y dagegen muß recht sorgfältig gemessen werden, vornehmlich wenn flache Kurven vorliegen; denn für y gegen f geht der Ausdruck $\frac{f \cdot y}{f - y}$ gegen Unendlich. Beträgt z. B. der Ablesefehler $\pm$ 0,1 mm, so sind die Abweichungen bei Radien von etwa 5 m 3%, bei Radien von 10 m unter denselben Voraussetzungen schon 10%. Zur Erreichung so genauer Einstellungen und Ablesungen ist daher die Verstelleinrichtung der Linse mit Skala und Trommelteilung versehen.

Eine Schwierigkeit, auf die noch hinzuweisen wäre, liegt in der Einstellung der Krümmung der Feder gemäß der Vorlage. Auf sie sind vielfach die Abweichungen in den Ergebnissen zurückzuführen. Zur Einstellung benutzt man zweckmäßig eine schwach vergrößernde Aufsetzlupe mit Diopter. Damit erreicht man bei einiger Übung und entsprechender Sorgfalt gute Übereinstimmung.

Manchmal erhält man Einzelwerte, die aus der Meßreihe erheblich herausfallen. Solche Abweichungen rühren von kleinen Buckeln oder Dellen der Feder her. Es ist darauf zu achten, daß die Feder in dieser Beziehung einwandfrei ist. Sollten trotzdem größere Abweichungen auftreten, so muß man zwischen den Nachbarwerten interpolieren.

Die Einstellung des Federrandes auf die gegebene Kurve wird nie völlig genau sein können, schon aus dem Grunde, weil zwischen zwei Stellschrauben das Moment und daher nach der Balkentheorie auch die Krümmung eine lineare Funktion der Längenkoordinate sein muß. Das Auge des Einstellenden besorgt hier jedoch eine Ausgleichoperation gefühlsmäßig, die auch der Mathematiker nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate vornehmen würde, wenn ihm 15 Punkte der Kurve genau gegeben wären. Denn er würde sicher versuchen, diese 15 Punkte nicht durch eine ganze rationale Funktion 14. Grades, sondern durch eine einfachere Funktion niederen Grades darzustellen, welche an sich durch 15 Punkte überbestimmt ist.

Mitunter interessiert weniger die Krümmung als die beiden ersten Ableitungen, die bis heute nicht immer mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden können. Es ist daher vorgesehen, den Krümmungsmesser so auszubauen, daß gleichzeitig mit der Krümmung auch die erste Ableitung gemessen und dann die zweite Ableitung nach der Formel

$$y'' = \frac{1}{r} \cdot (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

berechnet werden kann. Die diesbezüglichen Versuche sind zur Zeit noch nicht so weit durchgeführt, daß Aussagen über die Genauigkeit dieser Methode gemacht werden können. Sie hat aber vor den Differentiationsverfahren neben einer vielleicht größeren Genauigkeit auch den Vorteil, daß die Interpolation zwischen experimentell gegebenen Kurvenpunkten mit Hilfe des biegsamen Lineals verhältnismäßig schnell und genau ausgeführt werden kann.

IV. Meßergebnisse und Auswertung.

Zahlentafel 1.

Messungen an einem Kreis mit dem Radius $r = 40$ cm.

y	x	r
7,6	22,2	39,8
7,3	23.1	39,4
7,2	25,4	41,2
8,7	16.0	41,5
8,2	17,5	39,1
8,6	14,2	38,9
7,9	20,3	40,0
7,9	20,3	40,0
7,8	20,4	39,5

Den Zahlen liegen drei Federeinstellungen zugrunde. Bei jeder Einstellung wurden drei Messungen an verschiedenen Punkten der Feder gemacht.

Zahlentafel 2.

Messungen an einer experimentell erhaltenen Kurve, Bild 6. $(x+y)=31,3$ cm.

a	y_1	y_2	y_3	y_k	x	r	$1/r$
0,0	12,20	12,38	12,47	12,30	19,00	226,9	0,0044
0,5	11,90	11,58	11,61	11,70	19,60	131,4	0,0076
1,0	11 00	11,12	11,20	11,15	20,15	96,1	0,0104
1,5	10,88	10,66	10,85	10,61	20,79	77,2	0,0129
2,0	9,99	9,88	10,40	10,06	21,24	64,9	0,0154
2,5	9,70	9,56	9,75	9,55	21,75	57,2	0,0175
3,0	—	9,24	—	9,33	21,97	54,6	0,0183
3,5	9,38	9,32	9,52	9,35	21,95	54,8	0,0182
4,0	9,52	—	—	9,50	21,80	57,3	0,0174
4,5	10,00	—	9,60	9,75	21,55	60,0	0,0167
5,0	9,96	9,98	—	9,97	21,33	63,4	0,0157
5,5	10,33	10,15	10,15	10,25	21,05	68,5	0,0146
6,0	10,42	10,20	10,40	10,53	20,77	75,1	0,0133
6.5	10,88	10,73	10,77	10,80	20,50	82,7	0,0121
7,0	11,11	11,11	11,00	11,10	20,20	93,8	0,0107
7,5	11,61	11,34	11,16	11,32	19,98	104,6	0,0096
8,0	11,60	11,55	11,55	11,60	19,70	122,7	0,0081
8,5	11,98	11,62	11,80	11,87	19,43	148,3	0,0067
9,0	12,02	12,05	12,20	12,15	19,15	192,0	0,0051
9,5	12,59	12,43	12,31	12,42	18,88	268,9	0,0037
10.0	12,74	12,73	12,69	12,68	18,62	443,7	0,0023
10,5	12,81	12,87	13,00	12,90	18,40	1011,4	0,0010

Zahlentafel 3.

Vergleichsmessungen zu Zahlentafel 2 an der Kurve, Bild 6. $x+y=25$ cm.

a	y_1	y_2		y_k	x	r	$1/r$
0,0	12,30	12,42		12,36	12,64	240.1	0,0042
0,5	11,79	11,90		11,85	13,15	139,9	0,0071
1,0	11,12	11,17		11,30	13,70	97,1	0,0103
1,5	10,70	10,89		10,82	14,18	77,1	0,0130
2,0	10,21	10,53		10,25	14,75	61,8	0,0162
2,5	10,02	10,00		9,97	15.03	57,2	0,0175
3,0	9,81	—		9,80	15,20	54,6	0,0183
3,5	9,78	9,80		9,80	15,20	54,6	0,0183
4,0	9,95	9,98		9,92	15,08	56,2	0,0178
4,5	10,10	10,12		10,12	14,88	59,7	0,0167
5,0	10,23	10,34		10,34	14,66	64,1	0,0156
5,5	10,49	10,50		10.57	14,43	69,6	0.0144
6,0	10,76	10,84		10,80	14,20	76,4	0.0131
6,5	11,00	11,13		11,03	13,97	84,6	0,0118
7,0	11,23	11,16		11,24	13,76	94,1	0,0106
7,5	11,41	11.43		11,45	13,55	105,9	0,0094
8,0	11.70	11.80		11,65	13,35	120,5	0,0083
8,5	11,95	11,90		11,90	13,10	145,1	0,0069
9,0	12,20	12.11		12,16	12,84	187,6	0,0053
9,5	12,40	12,37		12,41	12,59	258,6	0,0039
10,0	12,71	12,74		12,68	12,32	437,3	0,0023
10,5	12,88	12,92		12,88	12,12	899,1	0,0011

In den Zahlentafeln 2 und 3 sind mit a die Meßpunkte auf der Feder bezeichnet. Die y_i bedeuten verschiedene Meßreihen, gewonnen aus ebenso vielen neuen Federeinstellungen. Die y_i sind als Funktionen von a graphisch dargestellt und von diesen Kurven die y_k abgelesen worden, die bei der Berechnung des Radius r eingesetzt sind. Um vergleichbare Meßreihen y_i zu erhalten, ist bei den Messungen die Summe der Abstände $(x+y)$ konstant gehalten worden. Sie beträgt für die Werte der Zahlentafel 2 31,3 cm, für die der Zahlentafel 3

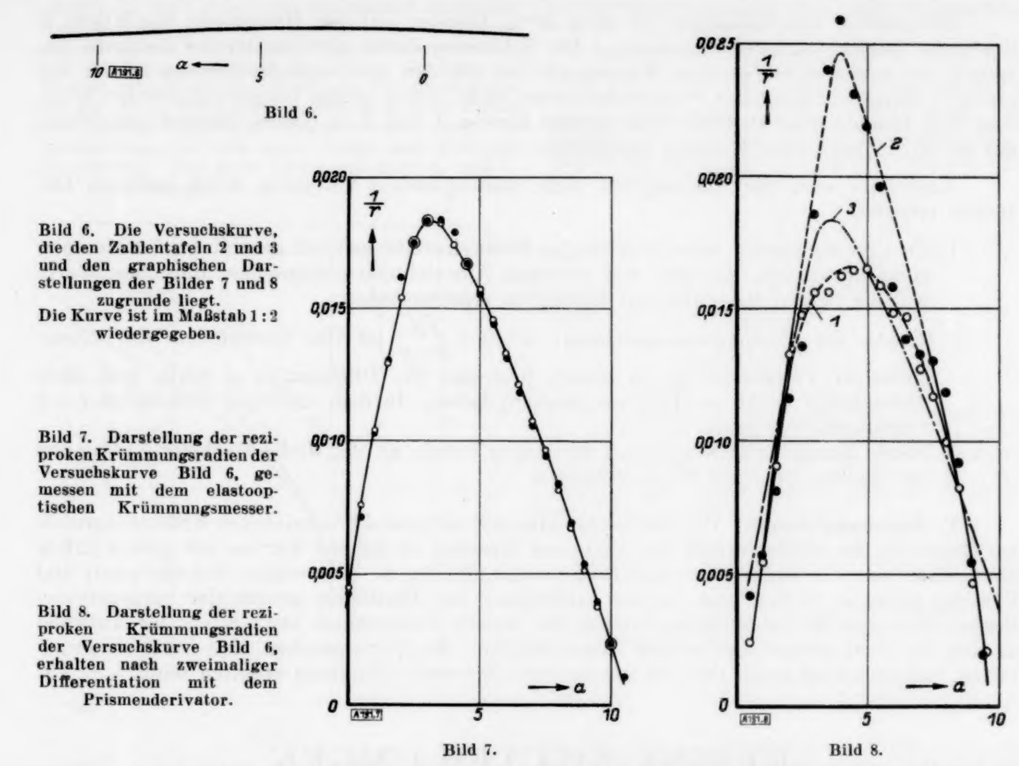


Bild 6.

Bild 6. Die Versuchskurve, die den Zahlentafeln 2 und 3 und den graphischen Darstellungen der Bilder 7 und 8 zugrunde liegt. Die Kurve ist im Maßstab 1 : 2 wiedergegeben.

Bild 7. Darstellung der reziproken Krümmungsradien der Versuchskurve Bild 6, gemessen mit dem elastooptischen Krümmungsmesser.

Bild 8. Darstellung der reziproken Krümmungsradien der Versuchskurve Bild 6, erhalten nach zweimaliger Differentiation mit dem Prismenderivator.

Bild 7. Bild 8.

25 cm. Alle Größen sind in cm gemessen. Beide Zahlentafeln beziehen sich auf dieselbe Kurve, Bild 6. Die Ergebnisse stimmen also gut überein. Die Abweichungen betragen im Mittel etwa 2 %. Stärkere Abweichungen treten nur bei den größeren Radien von einigen Metern auf. In Bild 7 ist $\frac{1}{r}$ als Funktion von a graphisch dargestellt.

Zum Vergleich ist die Krümmung der Kurve Bild 6 auch mit dem Prismenderivator bestimmt worden. Aus einer Anzahl von Messungen ergaben sich zwei Kurventypen für die Darstellung $\frac{1}{r} = f(a)$, die in Bild 8 durch die Kurven 1 und 2 wiedergegeben sind. Sie weichen untereinander und auch von der Kurve Bild 7, die in Bild 8 als Kurve 3 nochmals eingezeichnet ist, teilweise erheblich ab. Die Ursache für diese schlechte Übereinstimmung ist, wie schon oben gesagt, in der flachen Ausgangskurve und in Verbindung damit in der Unzulänglichkeit des Primenderivators zu suchen. Diese Tatsache sei an Hand des vorliegenden Beispiels nochmals kurz erläutert.

Die Neigungswinkel der Tangenten am Anfang und Ende der Kurve unterscheiden sich trotz stetiger Zunahme des Winkels längs der Kurve nur um etwa 6°. Das bedeutet bei etwa 20 Meßpunkten im Mittel eine Winkeländerung von Punkt zu Punkt von etwa 0,3°. Die Ablesegenauigkeit des Prismenderivators beträgt höchstens $\pm 0{,}2°$, d. h. Winkeländerung und Meßgenauigkeit sind von derselben Größenordnung. Es ist also nicht einwandfrei festzustellen, inwieweit eine zwischen zwei Punkten gemessene Winkeldifferenz auf einen Meßfehler oder eine Winkeländerung zurückgeht[2]).

Infolge der Streuung von $\pm 0{,}2°$ erhält man bei mehreren Messungen zur graphischen Darstellung von y' Punkthaufen, durch die die Kurve y' zu legen ist. Selbst bei Berücksichtigung der Mittelwerte ist y' niemals eindeutig. Stets wird man mit gleicher Berechtigung mehrere Kurven ziehen können, die zwar in den Einzelwerten wenig abweichen, deren Neigung aber beträchtlich verschieden sein kann. Die Folge davon sind große Abweichungen bei der zweiten Ableitung und der Krümmung. Die in Bild 8 dargestellten Kurven 1 und 2 sind aus denselben Meßreihen für die erste Ableitung hervorgegangen. Ihre Verschiedenheit ergibt sich aus zwei verschiedenen, in gleicher Weise möglichen Kurven y'.

[2]) Man könnte die gegebene Kurve durch geeignete Zentralprojektion so verzerren, daß ihre Neigungen und Krümmungen groß werden, um diese Meßfehler herabzudrücken. Von einer praktischen Erprobung dieses Verfahrens ist nichts bekannt.

Die größten Abweichungen von etwa 30%, bezogen auf den Höchstwert von Kurve 2, liegen im Gebiet stärkster Krümmung. Die Erklärung dafür gibt uns wieder die erste Ableitung, die an dieser Stelle einen Wendepunkt hat, für den die Tangentenrichtung infolge der geringen Meßgenauigkeit des Prismenderivators nicht sicher genug festgestellt werden kann. Aus dem Grunde sind in Bild 8 die beiden Kurven 1 und 2 in diesem Bereich gestrichelt, um die Unsicherheit der Messung anzudeuten.

Anderseits wird die Messung mit dem elastooptischen Verfahren durch mehrere Tatsachen erhärtet.

1. Es sind im ganzen zehn unabhängige Federeinstellungen mit anschließender Messung gemacht worden, die alle, von geringen Abweichungen abgesehen, dieselben Werte wie die beiden aufgetragenen Meßreihen ergeben haben.
2. Gemäß der Bestimmungsgleichung: $r = b + \frac{f y}{f - y}$ ist die Genauigkeit des elastooptischen Verfahrens um so größer, je größer die Differenz $f - y$ wird, weil dann Ablesefehler nicht so stark ins Gewicht fallen. In dem strittigen Bereich ist $f - y$ verhältnismäßig groß.
3. Durch Anlegen von Kreisen an die Kurve wurde an der Stelle stärkster Krümmung ein Radius von etwa 60 cm gefunden.

V. Zusammenfassung. Von den beiden hier zum erstenmal beschriebenen Krümmungsmeßverfahren ist das elastooptische vor allem zur Messung an flachen Kurven mit gutem Erfolg anwendbar und den Differentiationsverfahren weit überlegen. Die einzige Schwierigkeit und Ursache größerer Fehler liegt in der Einstellung der Blattfeder gemäß der vorgegebenen Kurve. Bei mehrfacher Messung beträgt die erzielte Genauigkeit etwa 3%. Der Aufwand an Zeit ist nicht größer als bei der Differentiation. Es ist vorgesehen, das Gerät so auszubauen, daß gleichzeitig mit der Krümmung auch die erste Ableitung erhalten wird. 191

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkung über den Einfluß des Seitenverhältnisses auf den Zusammenhang von Normalkraft und Tangentialkraft eines Tragflügels. Mit dieser kleinen Bemerkung soll die Aufmerksamkeit auf eine einfache Tatsache der klassischen Tragflügeltheorie gelenkt werden, die vielleicht bei manchen Überschlagsrechnungen von Nutzen sein kann: Die Funktion $c_n\,(c_t)$ ist praktisch vom Seitenverhältnis des Flügels unabhängig.

Man hat frühzeitig bemerkt, daß die übliche Polare $c_a\,(c_w)$ vom Seitenverhältnis[1] $\lambda = F/b^2$ des Flügels abhängig ist und unter der Voraussetzung elliptischer Auftriebsverteilung die bekannten Umrechnungsformeln entwickelt[2]), die in den meisten praktisch vorkommenden Fällen ausreichen, wie Messungen zeigen. Wir wollen nun beweisen, daß unter denselben Voraussetzungen in den Zusammenhang zwischen dem Normalkraftbeiwert c_n und dem Tangentialkraftbeiwert c_t das Seitenverhältnis nicht eingeht. Zwischen dem Auftrieb und dem induzierten Widerstand besteht die bekannte Beziehung $c_{w\,i} = \lambda\, c_a^2/\pi$, in welche das Seitenverhältnis als Faktor eingeht. Außerdem ist bei elliptischer Auftriebsverteilung

$$c_a = \frac{2\pi\sigma}{1 + 2\lambda\sigma}\,\alpha,$$

wobei

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\lambda=0}$$

[1]) Wir rechnen mit λ statt mit $A = b^2/F$, weil sich so übersichtlichere Formeln ergeben.

[2]) Siehe Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, I. Lieferung, S. 50 und Lehrbücher über Aeromechanik.

gesetzt ist. (Bei der ebenen Platte ist $\sigma = 1$, für Profile im allgemeinen etwas kleiner als 1.) Wir wollen nun in diese Beziehungen c_n und c_t einführen. Unter den üblichen Beschränkungen auf kleine Anstellwinkel gilt:

$$c_n = c_a + c_w\,\alpha$$
$$c_t = -c_a\,\alpha + c_w\,.$$

In der ersten Gleichung können wir $c_w\,\alpha$ gegen c_a vernachlässigen, so daß sich ergibt:

$$c_n = c_a = \frac{2\pi\sigma}{1 + 2\lambda\sigma}\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Für c_t erhalten wir mit $c_w = c_{w\,i} + c_{w\,p}$:

$$c_t = -\frac{2\pi\sigma}{1 + 2\lambda\sigma}\,\alpha^2 + \frac{4\pi\lambda\sigma^2}{(1 + 2\lambda\sigma)^2}\,\alpha^2 + c_{w\,p}$$

$$c_t = -\frac{2\pi\sigma}{(1 + 2\lambda\sigma)^2}\,\alpha^2 + c_{w\,p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Eliminieren wir α aus (1) und (2), erhalten wir endgültig

$$c_t = -\frac{1}{2\pi\sigma}\,c_n^2 + c_{w\,p} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

eine Beziehung, in welcher das Seitenverhältnis nicht mehr auftritt.

Dieses Ergebnis können wir uns in einfacher Weise veranschaulichen. Wir denken an die Überlegung, welche zu den Umrechnungsformeln für die $c_a\,(c_w)$-Polare führt. Dabei wird unter der Voraussetzung elliptischer Auftriebsverteilung (α_i = const. über die ganze Spannweite) für kon-

stantes c_a und damit für konstanten effektiven Anstellwinkel $\alpha_e = \alpha_g - \alpha_i$ die Änderung des geometrischen Anstellwinkels α_g und die von c_{wi} mit dem Seitenverhältnis bestimmt. Da für zwei Vergleichsflügel von verschiedenem Seitenverhältnis der gleiche c_a-Wert angenommen wird, so ist wegen des gleichen effektiven Anstellwinkels auch die Luftkraftresultierende nach Größe und Richtung die gleiche. Das heißt aber, daß auch c_n und c_t sich nicht ändern.

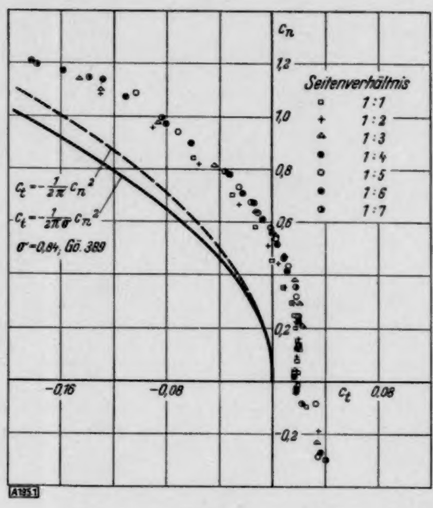


Bild 1.

Die bekannten Messungen aus der „I. Lieferung", nach denen in Bild 1 c_n über c_t für 7 Rechteckflügel verschiedenen Seitenverhältnisses aufgetragen ist, bestätigen die Richtigkeit der Beziehung (3) bis zum Seitenverhältnis 1:3 herunter. Der Gültigkeitsbereich unseres Satzes ist also offenbar der gleiche wie der der Umrechnungsformeln für die $c_a(c_w)$-Polare.

Göttingen. Dietrich Küchemann. 195

Benutzung projektiver Skalen zur Unterteilung von Skalen anderer Funktionen.

1. Die projektive Skala ist wegen ihrer großen Anpassungsfähigkeit außerordentlich brauchbar für die Unterteilung größerer Intervalle vorliegender Skalen, insbesondere wird man sie dazu beim Entwurf der Skalen solcher Funktionen verwenden, für die die Berechnung der Einzelwerte eine größere Rechenarbeit erfordert. Notwendig für eine derartige Verwendung ist, daß man eine möglichst gute Fehlerabschätzung hat. Nun ist aber die übliche Fehlerabschätzung [1]) sehr wenig genau und führt dadurch zu einer Unterschätzung der Brauchbarkeit der Annäherung durch projektive Skalen. Zu einer besseren Abschätzung kommt man nach einer Vermutung, die zuerst Herr Tollmien ausgesprochen hat, mittels des Restgliedes der Thieleschen Interpolationsformeln, die die reziproken dividierten Differenzen benutzen [2]). Diese Form des Restgliedes läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, sehr einfach, ohne auf die Thieleschen Formeln Bezug zu nehmen, ableiten; die numerische Auswertung der neuen Form des Restgliedes fordert allerdings etwas mehr Rechenarbeit, wie die der üblichen Form.

2. Es seien die drei Konstanten a, b und d in $\bar{y} = \frac{a x + b}{x + d}$ so bestimmt, daß die Werte von $\bar{y}$ mit denen der gegebenen Funktion $y = f(x)$ in den drei Punkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ und $P_3(x_3, y_3)$ übereinstimmen, d. h. diese Konstanten seien aus den drei linearen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a x_1 + b - d y_1 &= x_1 y_1 \\ a x_2 + b - d y_2 &= x_2 y_2 \\ a x_3 + b - d y_3 &= x_3 y_3 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

berechnet. Setzt man dann

$$f(x) = \frac{a x + b}{x + d} + R(x) \quad . \ . \ . \ . \quad (2),$$

so wird das zur Abschätzung des Unterschiedes der Funktionswerte dienende Restglied $R(x)$ Null werden, wenn x die Werte x_1, x_2 oder x_3 annimmt, d. h. es wird den Faktor $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ enthalten. Es erweist sich als praktisch für $R(x)$ den Ansatz zu machen

$$R(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x + d)^2} \chi(x) \quad . \ . \ . \quad (3).$$

Der Nenner $x + d$ ist für die hier in Frage kommende Verwendung stets von Null verschieden.

Dann hat die Funktion

$$\varphi(t) = f(t) - \frac{a t + b}{t + d} - \frac{(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)}{(t + d)^2} \chi(x)$$

die Eigenschaft, daß sie für die Werte $t = x_1, x_2, x_3$ gleich Null wird, denn für diese Werte sind die ersten beiden Summanden gleich und der letzte wird Null. Sie wird aber auch für $t = x$ Null, wie aus den Gl. (2) und (3) zu ersehen ist. Die gleiche Eigenschaft, vier Nullstellen in dem durch die vier Werte x_1, x_2, x_3 und x bestimmten Bereich zu haben, hat auch die Funktion

$$\Phi(t) = (t + d)^2 \cdot \varphi(t) = f(t)(t + d)^2 - (a t + b)(t + d) - (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) \chi(x).$$

Nach dem Rolleschen Satz wird also die dritte Ableitung $\Phi'''(t)$ eine Nullstelle ζ in diesem Gebiet haben. Es wird also

$$\chi(x) = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d \zeta^3} [f(\zeta)(\zeta + d)^2]$$

sein. Damit ist das gewünschte Restglied gewonnen.

$$R(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!(x + d)^2} \frac{d^3}{d \zeta^3} [f(\zeta)(\zeta + d)^2] \quad (4).$$

Beträgt die Längeneinheit der Skala von $f(x)$ l cm, so hat man also mit diesem Wert von $R(x)$ die Gleichung

$$l \cdot f(x) = l \cdot \frac{a x + b}{x + d} + l \cdot R(x) \quad . \ . \ . \quad (5)$$

und hierin ist $l \cdot R(x)$ so zu bestimmen, daß es die Zeichengenauigkeit nicht überschreitet, also etwa

$$l \cdot R(x) < 0{,}01 \text{ cm} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (6).$$

Daraus läßt sich entweder das Intervall bestimmen, in dem eine Unterteilung mittels einer solchen projektiven Skala erlaubt ist, oder es läßt sich danach die Zeicheneinheit l so wählen, daß in einem bestimmten Intervall eine solche Unterteilung erlaubt ist.

[1]) Z. B. Schwerdt: Lehrbuch der Nomographie. Berlin 1924, S. 63.

[2]) Z. B. L. M. Milne-Thomson: The Calculus of finit Differences, London 1933, S. 116.

3. Als Beispiel sei die Größe von l für eine Skala von $y = \operatorname{tg} x$ bestimmt, in der man das Intervall zwischen 40° und 50° mittels projektiver Skala unterteilen kann. Für diese Skala erhält man aus den Gleichungen (1), falls man x in Grad mißt:

$$\bar{y} = \frac{-x - 12{,}156}{x - 102{,}156},$$

während sich nach der Formel von Schwerdt, der die Funktionen nebst erster und zweiter Ableitung für $x = 45°$ zur Übereinstimmung bringt

$$\bar{y} = \frac{-x - 12{,}295}{x - 102{,}295}$$

ergibt. Der Fehler nach Schwerdt $R_s = \frac{x^3}{3!} f'''(\zeta)$, wo jetzt x in Bogenmaß zu messen ist, wird

$$R_s < \left(\frac{\pi}{36}\right)^3 \frac{1}{6} \frac{6 - 4\cos^2 50°}{\cos^4 50°} \approx 0{,}0025,$$

d. h. $l_s \cdot 0{,}0025 \leqq 0{,}01$ cm oder $l_s \approx 4$ cm.

Nach unserer Formel wird

$$R < \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!\,(x - 1{,}785)^2}$$
$$\left[\frac{6 - 4\cos^2\zeta}{\cos^4\zeta}(\zeta - 1{,}785)^2 + \frac{16\sin\zeta}{\cos^3\zeta}(\zeta - 1{,}785) + \frac{6}{\cos^2\zeta}\right].$$

Die eckige Klammer ist negativ. Sie hat absolut genommen zwischen 40° und 50° ihren größten Wert bei 50° nämlich 6,5, während der vor der Klammer stehende Ausdruck etwa bei 48° also für $x = 0{,}838$ sein Maximum hat. Daraus ergibt sich

$$R < 0{,}0003,$$

womit sich für $l \approx 30$ cm berechnet. Die Werte der eckigen Klammer nähern sich mit abnehmendem Winkel zunächst der Null, werden dann positiv und zwar wird der größte Wert für $\zeta = 0$ angenommen; dieser ist etwas größer als 12. In dem ganzen Gebiet ergibt sich kein kleinerer Wert für l als 30 cm. Würde man dagegen noch das Stück von 50° bis 60° hinzunehmen, so würde hier der Fehler schon bei entsprechender Interpolation maximal auf über 0,5 mm wachsen; in diesem Intervall müßte also eine Unterteilung in zwei Abschnitte vorgenommen werden, und jeder der beiden müßte mittels projektiver Skala weiter unterteilt werden.

Rechnet man die Werte für $\operatorname{tg} x$ und $\bar{y}$ im Intervall 40° bis 50° aus und damit die genauen Werte für die Unterschiede, so ergibt sich aus diesen mit unserer Formel $l \approx 50$ cm, mit der von Schwerdt dagegen $l_s \approx 20$ cm. Man sieht daraus, daß hier die Fehlerabschätzung mittels R wesentlich besser ist, als die mittels R_s, abgesehen davon, daß die maximale Abweichung nach unserer Formel kleiner sein muß als die nach der Formel von Schwerdt.

Dresden. Willers. 157

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. B. von **JUHOS**, Erkenntnisformen in Natur- und Geisteswissenschaften (Pan-Bücherei, Gruppe: Philosophie, Nr. 20). 57 S. Leipzig 1940, Rudolf Birnbach, Abt. Pan-Verlag. Preis brosch. 2,50 M.

Die Schrift sucht die Frage nach Wesen und Ziel der natur- sowie der geisteswissenschaftlichen Erkenntnisse zu beantworten; für die Naturwissenschaften werden die Ausführungen an die physikalische, für die Geisteswissenschaften an die historische Forschung angeschlossen, so daß die Ergebnisse der Überlegungen streng genommen zunächst nur für diese beiden Wissenschaften gelten. Verf. geht von der Physik aus und zeigt, daß man hier zwei Stufen von Gesetzen und dementsprechend auch zwei Stufen von Erkenntnissen zu unterscheiden hat. Wenn unter denselben Umständen auf ein bestimmtes Ereignis A immer das Ereignis B folgt, so spricht er von einem Gesetz erster Stufe. Eine Voraussage ist hier nur für eine ganz bestimmte, bereits beobachtete Ereignisfolge möglich. Kann man aber aus einer Reihe solcher Ereignisfolgen eine funktionelle Beziehung herauslesen, die dann auch Voraussagen von Ereignisfolgen ermöglicht, die nicht zur Gewinnung jener Beziehung benutzt worden sind, dann spricht er von Gesetzen — und Erkenntnissen — zweiter Stufe. Diese Darlegungen werden an Beispielen aus den beiden wichtigsten modernen physikalischen Theorien, der Quanten- und der Relativitätstheorie, erläutert. Die beiden für die Physik nachgewiesenen Erkenntnisstufen benutzt Verf. nun auch für die Geisteswissenschaften. Das Problem der Willensfreiheit führt ihn zur Annahme auch von zwei Stufen des Determinismus und des Indeterminismus. Von hier aus gelangt Verf. zu dem Schluß, daß die Geschichtswissenschaft nur Gesetze erster Stufe kennt, auf Gesetze zweiter Stufe und Voraussagen allgemeinen Charakters aber verzichten muß. Sie hätte das Ziel, durch Nacherleben einmaliger Fälle menschliches Erleben und Handeln zu verstehen und so durch Bewußtmachen wirksamer bedeutender seelischer Kräfte die Seele zu bereichern. Das Buch stellt einen interessanten Beitrag zu der Frage nach dem Unterschied zwischen natur- und geisteswissenschaftlicher Forschung und Erkenntnis dar.

Berlin. E. Mosch. 169

Prof. WILHELM **SPANNHAKE** und Dipl.-Ing. HERMANN **DOSENBACH**, Geschwindigkeit und Druck in Schaufelkanälen hydrodynamischer Getriebe. 1. Teil. (Deutsche Kraftfahrtforschung, Heft 38.) 16 S. m. 26 Bildern. Berlin 1940, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 1,40 M.

Über die in hydrodynamischen Getrieben tatsächlich auftretenden Strömungsvorgänge sind bisher nur wenige einwandfreie Untersuchungen durchgeführt worden. Deshalb ist es zu begrüßen, daß das Institut für Strömungsmaschinen an der Technischen Hochschule Karlsruhe die hier vorliegende umfangreiche Aufgabe in Angriff genommen hat. Berichtet wird über Messungen an 3 geometrisch ähnlichen Holzmodellen verschiedener Größe von einem Leitapparat für Strömungsgetriebe. Als Strömungsmittel wurde Luft benutzt, weil damit die Messungen am leichtesten durchzuführen sind. Zur Messung wurden Staukugeln bekannter und neuer Bauart mit Erfolg verwandt. Das Ergebnis ist, daß die Geschwindigkeitsverteilung in dem untersuchten Bereich von der Reynoldsschen Zahl und von der relativen Rauhigkeit der Kanaloberfläche praktisch nicht beeinflußt wird. Die in den Schaufelkanälen auftretenden Verluste werden noch weiter untersucht und die Ergebnisse sollen in einer zweiten Arbeit veröffentlicht werden.

Augsburg. E. Sörensen. 199

Dr.-Ing. habil. RICHARD **DZIALLAS**, Untersuchungen an einer Kreiselpumpe mit labiler Kennlinie. 62 S. m. 26 Bildern. Berlin 1940, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 6,50 M.

Es ist bekannt, daß Kreiselpumpen mit teilweise labiler Kennlinie bei bestimmten Betriebsverhältnissen in den anschließenden Rohrleitungen starke Druckschwingungen hervorrufen können. Der Verfasser hat zum erstenmal die hier auftretenden Vorgänge eingehend rechnerisch und praktisch untersucht und dabei alle Einflußgrößen berücksichtigt, die von Wichtigkeit sind. Die Rechnung führt zu einer nicht linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, für die Näherungslösungen angegeben werden, die in gewissen Bereichen mit den Versuchsergebnissen gut übereinstimmen. Für den Praktiker ist der durch Messung festgestellte Verlauf der Kennlinie für negative Fördermengen bedeutungsvoll. Ebenso wichtig ist aber der Hinweis darauf, daß die bei stationärer Strömung gemessene Kennlinie nicht mehr gilt, wenn die Fördermenge pulsiert. — Die Versuchsergebnisse können nicht den Anspruch erheben, allgemeine Gültigkeit zu besitzen. Sie sind aber dennoch sehr wertvoll, weil sie einen Einblick in bisher wenig bekannte Vorgänge vermitteln. Für die Untersuchung von konkreten Fällen empfiehlt sich die zeichnerische Behandlung der Schwingungsvorgänge, auf die der Verfasser verschiedentlich hinweist, wenn er sie auch selbst nicht angewandt hat.

Augsburg. E. Sörensen. 200

Dr.-Ing. HEINRICH **PRESS**, Der Boden als Baugrund mit Ergebnissen eigener Versuche. 2., neubearb. Aufl. (Mitteilungen aus dem Gebiete des Wasserbaues und der Baugrundforschung, Heft 9). V + 49 S. m. 64 Textabb. Berlin 1940, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 5,80 M.

Das Heft gibt auf 49 Seiten eine kurze Darstellung der neueren Baugrundlehre. In dem Bestreben, eine gewisse Vollständigkeit zu erreichen, mußte die telegrammstilartige Darstellung der ersten Auflage, auf deren Besprechung in dieser Zeitschrift 1940, S. 126, hingewiesen werden darf, beibehalten werden, die dem Anfänger, Nichtfachmann oder Grenzgebietler die Benutzung nicht gerade erleichtern wird. Durch die Fülle des auszugsweise angeführten fremden Stoffes werden die eigenen Versuche des Verfassers leider etwas erdrückt. Preß hat eine große Anzahl von Versuchen im kleinen und großen Maßstab, sowie Messungen am Bauwerk durchgeführt und verfügt über zahlreiche Erfahrungen und Beobachtungen, die es hätten gerechtfertigt erscheinen lassen, wenn er sich auf die Darstellung seiner Arbeiten und die unmittelbar benachbarten Arbeiten anderer Forscher beschränkt hätte. Der Wert des Heftes hätte u. E. dadurch nur gewinnen können.

Die neue Auflage beseitigt hinsichtlich der Anführung fremder Arbeiten die Mängel, die bei der Besprechung der ersten Auflage ausgestellt werden mußten. Es ist zu begrüßen, daß der Verfasser auf jene Anregungen weitmöglichst eingegangen ist.

Naumburg (Saale). Dr. Scheidig. 194

Dr.-Ing. E. h. WOLMAR **FELLENIUS**, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule zu Stockholm, Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohäsion (Adhäsion) und unter Annahme kreiszylindrischer Gleitflächen. 2., ergänzte Aufl. IV + 48 S. m. 38 Textabb. Berlin 1940, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 4,80 M.

Seit dem Erscheinen der 1. Auflage im Jahre 1926 gehört das Büchlein von Fellenius zum unentbehrlichen Rüstzeug jedes Erd- und Tiefbauingenieurs, der mit erdstatischen Berechnungen für Böschungen großer Dämme, Rutschungsfragen, Kaibauten u. dgl. zu tun hat.

Die Annahme kreiszylindrischer Gleitflächen bei erdstatischen Gleichgewichtsberechnungen, die sich schon seit langem im Schrifttum findet, ist durch die systematische Behandlung von Fellenius praktisch erst fruchtbar geworden. Die in der Praxis meist vorkommenden verwickelten Fälle gestatten keine rein mathematischen Lösungen und die ungünstigste Lage der Gleitfläche muß durch Probieren gefunden werden. Hierfür gibt die Arbeit wertvolle Fingerzeige durch systematische Vorarbeit. Wenn auch neuerdings an Stelle des Gleitkreises die logarithmische Spirale vorgeschlagen worden ist, werden die Methoden von Fellenius doch ihre Bedeutung nicht verlieren. Dasselbe gilt von der Annahme über das Zusammenwirken von Reibung und Kohäsion, die trotz der Erkenntnisse der neuen Erdbauforschung noch nicht durch eine praktisch brauchbare neue Grundlage ersetzt werden konnte.

Durch das Fehlen der Arbeit wäre nach dem Absatz der ersten Auflage eine empfindliche Lücke entstanden. So ist es zu begrüßen, daß sich der Verlag zu einer Neuauflage in ergänzter Form entschlossen hat.

Naumburg (Saale). Dr. Scheidig. 180

HANS **ERTEL**, Elemente der Operatorenrechnung mit geophysikalischen Anwendungen. 133 S. m. 8 Textabb. Berlin 1940, Verlag Julius Springer. Preis 7,50 M.

Die kleine Schrift von Ertel gliedert sich in vier Hauptabschnitte. Der erste (20 S.) gibt allgemeine mathematische Ausführungen über Differentialgleichungen, enthaltend die Definitionen und einige wichtige Sätze, meistens ohne Beweis, aber an Beispielen erläutert. Der zweite Teil (39 S.) bringt die Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Unter den gewöhnlichen D.-Gl. finden wir die Bewegungsgleichungen der Punktdynamik, bezogen auf ein Inertialsystem oder auf ein rotierendes Koordinatensystem, die Bewegungsgleichungen eines Elektrons im elektromagnetischen Feld und die Schwingungsgleichungen. Von den partiellen D.-Gl. werden die Potentialgleichungen, die Gleichungen der Hydrodynamik, der Elektrodynamik, der Wärme und Diffusion behandelt. Auf dem vorgesehenen knappen Raum ist eine ausführliche Darstellung und Herleitung freilich nicht möglich; es handelt sich eher um ein kurzes Repetitorium aus der mathematischen Physik.

Der dritte Teil (37 S.) behandelt das eigentliche Thema, die Elemente der Operatorenrechnung. Hier werden die Hauptregeln für das Rechnen mit dem Differentialoperator formal hergeleitet; für eine eigentliche Begründung und Darlegung der Gültigkeitsgrenzen fehlt natürlich der Raum.

Im vierten Teil (31 S.) werden folgende geophysikalische Aufgaben mittels Operatorenrechnung gelöst: Die Elektronenbewegung und die Ausbreitung der elektrischen Wellen in der Ionosphäre; harmonische Wasserwellen; die Eigenschwingungen von Seen; die durch den Wind hervorgerufenen stationären und nichtstationären Driftströme im Ozean; der Ausgleich von Salzgehaltsstörungen im Ozean durch Turbulenz, und die Wärmeleitung im Erdboden. Ein Verzeichnis des Schrifttums, eine Operatorentabelle, Namen- und Sachregister schließen das Buch ab.

Es bringt in gedrängter Kürze einen umfangreichen Stoff und stellt an die Konzentration des Lernenden keine geringen Ansprüche. Der fort-

aber die Fehlerabschätzung war in dieser Untersuchung bis zu einem gewissen Grade durch den günstig ausgefallenen Vergleich mit dem Experiment ersetzt. Durch meine gasdynamische Arbeit (diese Zschr., Bd. 17 (1937), S. 117 bis 136), auf die Herr Ringleb in *diesem* Zusammenhang über Gebühr hinweist, ist die Ungefährlichkeit des Durchgangs durch die Schallgeschwindigkeit für adiabatische Potentialströmungen allenfalls an Hand von exakten Beispielen nur noch bekräftigt worden.

2. Dagegen sind zum ersten Male in der erwähnten Arbeit von mir *Grenzlinien* adiabatischer Potentialströmungen ausführlich diskutiert worden, über die hinaus eine Fortsetzung von Strömungen der angegebenen Art nicht möglich erscheint. Herr Ringleb bezeichnet diese Grenzlinien in seiner Arbeit als *Stoßlinien*, was vielleicht zu Verwechselungen mit Verdichtungsstößen führen kann, die zunächst etwas anderes sind. Die Strömung hat an diesen Grenzlinien gewisse singuläre Eigenschaften, und auf die *singulären* Eigenschaften allein kommt es an. Diese sind, so wie sie Herr Ringleb formuliert, bereits vollständig an den in meiner Arbeit behandelten Strömungen von mir seinerzeit festgestellt. Das Druckgefälle bzw. die Beschleunigung senkrecht zur Grenzlinie ist unendlich, ebenso die Krümmung der Stromlinien oder anders ausgedrückt, die Stromlinien haben dort eine Rückkehrkante. Weiter hat Herr Ringleb und vor ihm schon W. G. Bickley[1]) bemerkt, daß die Grenzlinie eine Machsche Welle ist; denn die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Grenzlinie ist gleich der Schallgeschwindigkeit. Dies letztere bedeutet freilich kein singuläres Verhalten. Ich hatte aber seinerzeit über die von Herrn Ringleb wiedergefundenen Eigenschaften hinaus die m. E. grundlegende Tatsache festgestellt, daß die Grenzlinie eine Enveloppe Machscher Wellen ist. Da Herr Ringleb nicht auf meine Untersuchungen zur Frage der Grenzlinien eingeht, scheint mir diese Erinnerung angebracht.

Es ist sehr begrüßenswert, daß Herr Ringleb zu dem interessanten und wichtigen Phänomen einer natürlichen Grenze adiabatischer Potentialströmungen neue Beispiele beigesteuert hat. Besonders erwünscht wäre der Nachweis, daß auch bei den Strömungen von Herrn Ringleb die Grenzlinien Enveloppen Machscher Wellen sind.

Dresden. W. *Tollmien*. 213

[1]) Vgl. G. I. *Taylor*: Recent work on the flow of compressible fluids. Journal of London Mathem. Soc. Bd. 5 (1930), S. 224, Deutsche Übersetzung in Z. angew. Math. Mech., Bd. 10 (1930), S. 334. Taylor hat der Frage einer natürlichen Grenze adiabatischer Potentialströmungen viel Nachdenken gewidmet, ohne jedoch zu einem klaren Ergebnis zu kommen.

Erwiderung. Herr Tollmien bemängelt in den vorstehenden Ausführungen, *daß ich in meiner Arbeit nicht genügend auf sein Beispiel von Grenzlinien hingewiesen habe*, welche sich begrifflich mit den *Stoßlinien* in meinen Beispielen decken und die gleichen Eigenschaften zeigen.

Das Beispiel von Herrn Tollmien hielt ich für so allgemein bekannt, daß es mir zu genügen schien, wenn ich die Tollmiensche Arbeit gleich am Anfange meines Aufsatzes in der üblichen Weise zitierte. Ich hätte allerdings wohl besonders hervorheben sollen, warum ich die Bezeichnung „*Stoßlinie*" wählte. Das möchte ich hier nachholen und überhaupt in diesem Zusammenhange einige *Feststellungen von allgemeinerem Interesse* treffen:

In meiner Arbeit handelt es sich viel weniger darum, *einzelne neue Beispiele* für adiabatische Strömungen mit Stoßlinien (Grenzlinien) anzugeben, als vielmehr darum, ein *weitreichendes Integrationsverfahren* zur Lösung der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung zu entwickeln. Ich möchte daher zunächst besonders hervorheben, daß es sich bei meinen Lösungen nicht um Einzelbeispiele oder spezielle Lösungsscharen — wie bei Herrn Tollmien — handelt, *sondern um eine Lösungsgesamtheit, welche die gleiche Mächtigkeit besitzt wie die Gesamtheit aller inkompressiblen Potentialströmungen.*

Die Beispiele meiner Arbeit lassen sich dementsprechend beliebig vermehren. Worauf ich nun durch die kurzen Angaben in der Einleitung meiner Arbeit hinweisen wollte, war die Tatsache, *daß die Stoßlinie* — die also Herr Tollmien erstmals in einem Spezialfall erhielt — *eine ganz allgemein auftretende Erscheinung ist.* Das zeigten zunächst noch zahlreiche andere aus dem allgemeinen Verfahren sich ergebende Beispiele, die ich nicht in meine Arbeit aufgenommen habe. Ich habe überdies in einer weiteren Arbeit, die seit längerer Zeit im Druck ist und in der „Deutschen Mathematik" erscheinen wird, die Theorie der Stoßlinie als natürliche Grenze einer adiabatischen Gasströmung in voller Allgemeinheit entwickelt. Auf diese Arbeit habe ich übrigens auf S. 190 in einer Fußnote hingewiesen, die Herr Tollmien vielleicht übersehen hat. Die Taylorsche Frage nach den *natürlichen Grenzen* einer adiabatischen Strömung und die Anregung von Herrn Tollmien betreffend *die Stoßlinien als Einhüllende der Machschen Linien* haben in dieser meiner zweiten Arbeit, auf die ich hier nochmals verweise, bereits ihre volle Klärung erfahren.

Ich möchte nun noch begründen, warum ich die Bezeichnung *Strömungsstoß* bzw. *Stoßlinie* gewählt habe und nicht *Grenzlinie* oder *singuläre Linie*. Die letzte Bezeichnung ist nicht zu empfehlen, weil die Bezeichnung singulär schon allzuviel benutzt wird und hier zu mancherlei Irrtümern führen könnte, z. B. zu einer Verwechselung mit Strömungssingularitäten. Gegen die Bezeichnung „Grenzlinie" kann man einwenden, daß es fraglich ist, ob es sich dabei wirklich um die Grenze einer realen Strömung handelt. Es ist nur bewiesen, daß eine *analytische* Fortsetzung einer vorliegenden Lösung über ihre „Grenzlinie" nicht möglich ist. Demgegenüber ist die physikalische Bezeichnung *Stoßlinie* vollkommen einwandfrei, da eben das Auftreten eines Stoßes eine die betreffende Linie eindeutig charakterisierende *physikalische Eigenschaft* ist. Eine andere Bezeichnungsmöglichkeit wäre noch „Staulinie", weil die allgemeine Bedingung für eine solche (S. 190 Fußnote) im Unterschallgebiet die Staupunkte liefert, die Staulinie also als deren Verallgemeinerung im Überschallgebiet aufgefaßt werden kann. In einem Staupunkt tritt aber kein Stoß ein, so daß doch ein wesentlicher Unterschied vorliegt. Es bleibt also als treffendste Bezeichnung die der „Stoßlinie".

Schließlich möchte ich noch bemerken, daß ich es nur deshalb für angebracht hielt, nochmals auf das im allgemeinen ungefährliche Verhalten einer adiabatischen Strömung bei Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit hinzuweisen, weil trotz der Existenz einer Lavaldüse in dieser Hinsicht öfters Unklarheiten auftauchen.

Augsburg. F. *Ringleb*. 213

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.